



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ENERGETICKÝ ÚSTAV

ENERGY INSTITUTE

ŘÍZENÁ TVORBA BUBLIN

CONTROLLED GENERATION OF BUBBLES

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Michael Petráček

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Pavel Rudolf, Ph.D.

BRNO 2019

Zadání bakalářské práce

Ústav: Energetický ústav
Student: **Michael Petráček**
Studijní program: Strojírenství
Studijní obor: Základy strojního inženýrství Ve-
doucí práce: **doc. Ing. Pavel Rudolf, Ph.D.**
Akademický rok: 2018/19

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Řízená tvorba bublin

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Jednou z možností jak generovat bubliny (např. pro různé technologické procesy) je využít přesyceného roztoku plynu v kapalinách. Bubliny vznikají v místech nerovností na povrchu. Ty jsou buď náhodné (to je důležité pro vznik kavitace např. v čerpadlech) nebo mohou být cíleně rozmístěné (např. pro využití v technologických procesech).

Cíle bakalářské práce:

Cílem je výzkum řízeného vzniku mikrobublin na nerovnostech (např. dolíky), které slouží jako místo vzniku těchto bublin. Studie proběhne pro různé typy nerovností a povrchů.

Parciální cíle: rešerše problematiky, návrh experimentu a jeho realizace v laboratoři s využitím rychlokamery.

Seznam doporučené literatury:

GROSS, T.F., J. BAUER, G. LUDWIG, D.F. RIVAS a P.F. PELZ. Bubble nucleation from micro-crevices in a shear flow. Experiments in Fluids. 2018, 59(12), 1-10.

RIVAS, F.D., A. PROSPERETTI, A. ZJISLTRA, D. LOHSE a H. GARDENIERS. Efficient sonochemistry through microbubbles generated with micromachined surfaces. Angewandte Chemie. 2010, 122(50), 9893–9895.

GROSS, T.F. a P.F. PELZ. Diffusion-driven nucleation from surface nuclei in hydrodynamic cavitation. Journal of Fluid Mechanics. 2017, (830), 138-164.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2018/19

V Brně, dne

L. S.

doc. Ing. Jiří Pospíšil, Ph.D.

ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.

děkan fakulty

Abstrakt

Bakalářská práce se zabývá chováním bublin v přesycených roztocích. V první části je popsán mechanismus vzniku bubliny, jejich růst a pohyb v kapalině. V druhé části jsou porovnány výsledky experimentu s teoretickým výpočtem.

Abstrakt

This bachelor's thesis describes behaviour of bubbles in supersaturated liquid. In the first part is described a mechanism of nucleation bubbles, their growth and motion in liquid. There are the results of experiment with a theoretical calculation compared in the second part.

Klíčová slova

bublina, Henryho zákon, difuze, Fickovy zákony, pohyb bubliny

Keywords

bubble, Henry's law, diffusion, Fick's laws, bubble motion

Bibliografická citace

PETRÁČEK, Michael. *Řízená tvorba bublin*. Brno, 2019. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/117995>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Energetický ústav. Vedoucí práce Pavel Rudolf.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vytvořil samostatně s použitím pramenů uvedených v seznamu použitých zdrojů.

24. května 2019

.....

Michael Petráček

Poděkování

Rád bych poděkoval panu Bronislavu Kusému, panu Karlu Večeřovi a Ing. Martinu Hudcovi za sestavení akvária a pomoc s realizováním experimentů, dále Ing. Davidu Štefanovi, Ph.D. za pomoc se snímáním záznamů vysokorychlostní kamerou. Největší dík pak patří doc. Ing. Pavlu Rudolfovi, Ph.D. za laskavé a trpělivé vedení práce.

Obsah

Úvod	11
1. Kavitace a tvorba bublin	12
2. Rozpustnost plynu v kapalinách.....	14
2.1. Roztoky	14
2.2. Henryho zákon	14
2.2.1 Tvary Henryho zákona	14
2.2.2 Závislost Henryho konstanty na teplotě	16
3. Tvorba a růst bublin v přesyceném roztoku	17
3.1. Povrchové napětí.....	17
3.1.1 Povrchové napětí bubliny	18
3.2. Nukleace bublin	19
3.3. Růst bublin	19
3.3.1 Difuze	19
3.3.2 1. Fickův zákon.....	20
3.3.3 2. Fickův zákon (rovnice difuze)	20
3.3.4 Rovnice difuze v proudící kapalině	21
3.3.5 Rovnice růstu bublin.....	21
3.3.6 Stadia růstu bubliny	22
3.3.7 Závislost poloměru bubliny na čase	24
3.3.8 Doba trvání jednotlivých stádií.....	24
3.4. Održení bubliny	26
3.4.1 Održení v klidném roztoku	26
3.4.2 Održení bubliny v proudu.....	26
3.4.3 Frekvence održení bublin	27
4. Stoupání bublin v kapalině	28
4.1. Síly působící na bublinu.....	28
4.1.1 Vztlaková síla	28
4.1.2 Tíhová síla	28
4.1.3 Odporové síly	29
4.2. Odporový koeficient	31
4.3. Maximální rychlost pohybu bubliny	32

4.4. Růst bubliny během pohybu v kapalině	33
5. Experiment	35
5.1. Akvárium	35
5.2. Sklenička.....	36
5.2.1 Bubliny s perlivou vodou	36
5.2.2 Bubliny z prosecca	41
5.3. Bubliny z vlákna celulózy.....	45
5.4. Zhodnocení experimentů	47
6. Závěr.....	48
Seznam použitých zdrojů.....	50
Seznam použitých zkratek a symbolů	53
Přehled konstant	55

Úvod

Bubliny plynu v kapalině nás provázejí celým dnem. Od ranního zapnutí rychlovarné konvice na čaj nebo kávu, přes pití minerálky až po večerní mytí nádobí nebo posezení s přáteli u piva.

Nepřímo pak tím, že hrají významnou roli při dalších procesech, které jsou pro nás neméně důležité. Například v čistírnách odpadních vod se využívají k separování tuků, v hutním průmyslu při třídění vytěžených rud, dále pak vznikají při dějích spojených s kavitací u čerpadel, turbín elektráren nebo u lodních šroubů. K tomu, aby bylo možné bubliny co nejlépe využít nebo je eliminovat pokud jsou nežádoucí, je potřeba dobře porozumět tomu za jakých podmínek vznikají a jak se následně chovají.

V rešeršní části této práce je popsán vznik a růst bublin v přesycených roztocích a po odtržení ode dna jejich následný pohyb ke hladině. V experimentální části bylo provedeno pozorování pohybu bubliny v přesycené kapalině směrem k hladině.

1. Kavítace a tvorba bublin [3][26][27]

Kavítace je děj, při kterém vlivem změn tlaku dochází k růstu a zániku bublin plynu nebo páry v kapalině. V okamžiku zániku bublin dochází k velkému rázu a na okamžik k lokálnímu extrémnímu nárůstu teploty (až 15 000 K). Tento jev je výrazně negativní v oblasti hydraulických strojů a námořní techniky, když způsobuje nadměrný hluk, vibrace a mechanické poškození tzv. kavitační erozi. V poslední době se však výzkum čím dál více začíná zaměřovat na pozitivní využití těchto vlastností. Například k čištění povrchů, odstraňování bakterií a sinic z vody nebo v medicíně k odstraňování ledvinových kamenů.

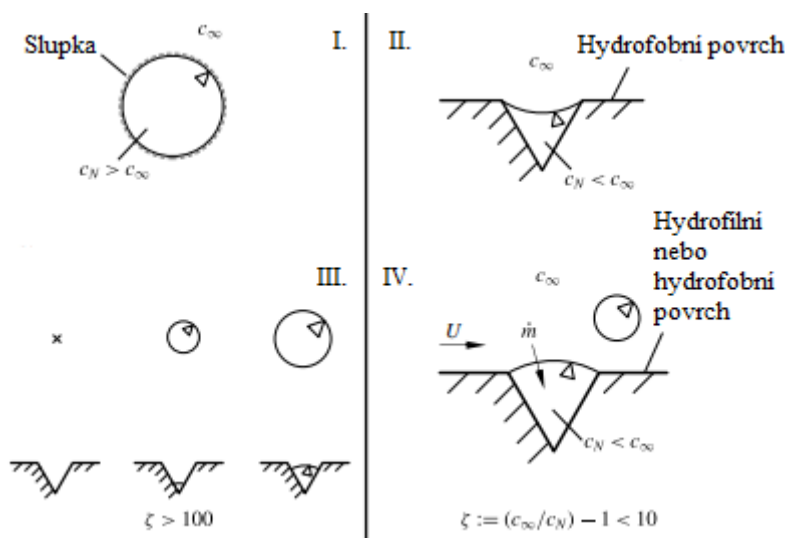
Rozlišujeme dva typy kavítace – hydrodynamickou a akustickou.

Společným prvkem obou typů je, že musí existovat nějaká místa, která naruší homogenitu kapaliny. Pokud by byla kapalina čistě homogenní, dokázala by přenést tahová napětí při tlaku nižším než je tlak nasycených par a ke kavítaci by vůbec nedošlo. Těmito místy obvykle jsou nerozpuštěné plyny a hydrofobní pevné částice. Dohromady se pak označují jako zárodky kavítace nebo kavitační jádra. Množství těchto zárodků v kapalině souvisí s jejich dlouhodobou stabilitou.

Ke vzniku hydrodynamické kavítace dochází v okamžiku, kdy v proudící kapalině poklesne tlak pod tlak nasycených par pro danou teplotu. Kapalina se pak začne odpařovat a v místech kavitačních zárodků dochází ke vzniku malých bublinek. Ty jsou unášeny proudem. V místě vyššího tlaku pak začne pára zpět kondenzovat a vzniknou tzv. kavitační dutiny. Do těchto dutin začne pronikat kapalina, až dojde k úplnému zániku bublin. Ten je doprovázen již výše zmíněným rázem a nárůstem teploty.

U akustické kavítace dochází ke změnám tlaku v kapalině vlivem procházejících zvukových vln, kdy dochází k pravidelnému intenzivnímu zhušťování a zředění kapaliny.

U kavítace se rozlišuje, zda-li se zárodky volně pohybují v kapalině nebo jsou pevně spojeny se stěnou (tzv. volné nebo povrchové zárodky) a zda-li se kapalina nachází v rovnovážném nebo přesyceném stavu (viz 2.1).



Obr. 1.1: Příklady zárodků a jejich vzniku (upraveno z [3])

- I. Volně se pohybující bublina v kapalině, která se nachází v rovnovážném stavu. Povrch bubliny je stabilizován „slupkou“ (např. z organických materiálů), která zabraňuje difuzi.
- II. Zárodek v nerovnosti hydrofobního povrchu v kapalině, která se nachází v rovnovážném stavu. Zárodek je stabilní do té doby než se kapalina stane silně podsycenou.
- III. Homogenní nukleace bublin v přesyceném roztoku. Vyžaduje velký stupeň přesycení (viz. 2.1)
- IV. Difuzí řízená nukleace v přesyceném roztoku je periodicky se opakující proces. Je to heterogenní nukleace tzn. po odtržení bubliny zůstává v trhlině malé množství nerozpuštěného plynu, které slouží jako zárodek nové bubliny.

Je všeobecně rozšířený názor, že kavitace je způsobena zejména volnými zárodky a vliv povrchových zárodků hraje minimální roli. Hlavním argumentem je, že doba zániku kavitační dutiny (1-10 μ s) je mnohem kratší než doba vzniku bubliny v přesyceném roztoku. Epstein a Plesset (1950) vyšetřovali čas, za jak dlouho se rozpustí bublina v podsyceném roztoku (bublina o poloměru 10 μ m se rozpustila za 2,5 s), jako čas potřebný k tomu, aby poloměr bubliny vzrostl desetinásobně.

Nicméně se ukazuje např. Pelz *et al.* (2017), že i zárodky vzniklé z povrchu mohou mít významný dopad na kavitaci a její průběh. Při tzv. difuzí řízené nukleaci dochází v přesycených roztocích v nerovnostech k periodicky se opakujícímu vzniku bublin, jejichž frekvence vzniku (100 – 1000 Hz) je bližší době zániku kavitačních dutin.

Právě proto má smysl pro lepší porozumění jevu kavitace zabývat se tvorbou bublin v přesycených roztocích.

2. Rozpustnost plynu v kapalinách

2.1. Roztoky [1][3][7]

Plyny mohou být rozpustné v kapalinách, podobně jako například minerály. Jejich rozpuštěním vznikne roztok plynu v kapalině. Podle možnosti dalšího rozpouštění plynu lze pak rozlišovat tři druhy roztoků: nasycený roztok, nenasycený roztok, přesycený roztok.

Nasycený roztok – plynu je rozpuštěno maximální množství, které lze pro dané podmínky v kapalině rozpustit. Nastane rovnovážný stav, nebude probíhat další výměna plynu přes hladinu s okolím.

Nenasycený roztok – plynu je rozpuštěno méně než by se ho mohlo rozpustit. Roztok má snahu se dostat do rovnovážného stavu, přes hladinu se bude rozpouštět další plyn.

Přesycený roztok – plynu je rozpuštěno více než je pro dané podmínky možné. Roztok má opět snahu dostat se do rovnováhy, plyn bude přes hladinu vylučován ven difuzí nebo ve formě bublin.

Přesycenost roztoku se definuje pomocí stupně přesycení ζ [-]:

$$\zeta = \frac{c_{\infty}}{c_n} - 1 \quad (2.1)$$

kde c_{∞} je koncentrace plynu v kapalině a $c_n = p_n H^{cp}$ je lokální nasycená koncentrace kapaliny pro daný tlak. P_n je parciální tlak plynu uvnitř bubliny. Henryho konstanta H^{cp} je popsána v odstavci níže.

U přesyceného roztoku platí $\zeta > 0$. Stupeň přesycení ζ například u šampaňského se rovná pěti. U běžných sycených nápojů se pak pohybuje kolem dvou.

Př. 1: U přesycené minerální vody nebo sodovky nalité do skleničky, dochází k unikání plynu do okolí. Zajímavé je, že ačkoliv na začátku lze pozorovat bouřlivý únik bublin, celkově se na vyloučení plynu podílí asi jen z 20%. Zbylých 80% plynu je vyloučeno difuzí.

Př. 2: V rybníce ryby spotřebovávají kyslík a produkují oxid uhličitý. Voda je tedy přesycená oxidem uhličitým, naopak nenasycená kyslíkem. Přes hladinu se pak do vody rozpouští kyslík, naopak přebytečný oxid uhličitý je vylučován ven.

2.2. Henryho zákon [5]

Množství plynu, které je možné rozpustit v kapalině, udává Henryho zákon¹. Zákon říká, že *platí přímá úměrnost mezi množstvím plynu rozpuštěným v kapalině a parciálním tlakem plynu nad její hladinou.*

Číslo vyjadřující úměrnost mezi množstvím rozpuštěného plynu a jeho parciálním tlakem se nazývá Henryho konstanta.

2.2.1 Tvary Henryho zákona [5]

Naneštěstí vyjádření tohoto zákona může mít mnoho podob a tedy i hodnoty a rozměry Henryho konstanty se liší v závislosti na použitém tvaru zákona. O to důležitější je u hodnot uvádět jednotky.

¹ William Henry (12. 12. 1775 – 2. 9. 1836) byl anglický lékař a chemik. Věnoval se studiu plynů, roku 1803 publikoval Henryho zákon.[2]

Pravděpodobně nepoužívanější tvar zákona je:

$$c_a = H^{cp} p \quad (2.2)$$

kde c_a [mol.m⁻³] je koncentrace plynu v kapalině, p [Pa] parciální tlak plynu a H^{cp} Henryho konstanta. Konstanta má pak rozměr [mol.m⁻³ Pa⁻¹]. Převážně ve starší literatuře se pak tato konstanta vyjadřovala pomocí Bunsenova nebo Kuenenova koeficientu α resp. S .

Mezi další tvary pak patří:

$$c_a = H^{cc} c_g \quad (2.3)$$

c_a [mol.m⁻³] je koncentrace plynu v kapalině, c_g [mol.m⁻³] je koncentrace plynu ve vzduchu a H^{cc} [-] Henryho konstanta.

Pro ideální plyny pak platí převodní vztah:

$$H^{cc} = H^{cp} RT \quad (2.4)$$

kde T je termodynamická teplota a plynová konstanta R .

Vzorec s využitím molality:

$$b = H^{bp} p \quad (2.5)$$

kde b je molalita [mol.kg⁻¹], p parciální tlak [Pa]. Konstanta H^{bp} má rozměr [kg⁻¹.Pa⁻¹]. Díky molalitě neexistuje přesný převod na konstantu H^{cp} , ale pouze přibližný vztah:

$$H^{bp} \approx H^{cp} / \rho_{H_2O} \quad (2.6)$$

Vzorec s molárním zlomkem:

$$x = H^{xp} p \quad (2.7)$$

kde x je molární zlomek [-], p parciální tlak [Pa] a H^{xp} Henryho konstanta [Pa⁻¹] nebo také se jako jednotka často používá [atm⁻¹]. Pro převod opět existuje pouze přibližný vztah:

$$H^{xp} \approx \frac{M_{H_2O}}{\rho_{H_2O}} H^{cp} \quad (2.8)$$

Další tvary zákona vzniknou přepsáním Henryho konstanty z pravé na levou stranu rovnice. Konstanty se pak značí písmenem K a jejich velikost je inverzní k příslušné konstantě H .

Tabulka 2.1: Převody mezi jednotlivými konstantami pro $T=298,15$ K a hustotu vody 997 kg.m⁻³ [5]

	H^{cp} [mol.m ⁻³ .Pa ⁻¹]	H^{cc} [-]	H^{bp} [mol.kg ⁻¹ .Pa ⁻¹]	H^{xp} [atm ⁻¹]
H^{cp} [mol.m ⁻³ .Pa ⁻¹]	1	2478,96	1,00301.10 ⁻³	1,83089
H^{cc} [-]	4,03395.10 ⁻⁴	1	4,04609.10 ⁻⁷	7,38573.10 ⁻⁴
H^{bp} [mol.kg ⁻¹ .Pa ⁻¹]	997,000	2,47152.10 ⁶	1	1825,40
H^{xp} [atm ⁻¹]	0,546182	1353,96	5,47826.10 ⁻⁴	1

2.2.2 Závislost Henryho konstanty na teplotě [5]

Změny hodnot rovníkových konstant v závislosti na teplotě při chemických dějích lze vyjádřit pomocí van't Hoffovy rovnice. Tato rovnice lze aplikovat i na Henryho konstantu:

$$\frac{d \ln H}{d(1/T)} = \frac{-\Delta_{sol}H}{R} \quad (2.9)$$

kde $\Delta_{sol}H$ je entalpie rozpuštění, R plynová konstanta, H Henryho konstanta a T termodynamická teplota. Integrace pak vede na tvar se dvěma parametry A, B:

$$H(T) = A * \exp\left(\frac{B}{T}\right) \quad (2.10)$$

Nevýhodou tohoto vyjádření je, že platí pouze pro oblasti teplot, kdy nedochází k přílišné změně entalpie na teplotě. Pro větší rozmezí se pak používají jiné empirické metody např. Wilhelm *et. al.* (1977) použili vztah:

$$\ln H = A + B \cdot T^{-1} + C \cdot \ln T + D \cdot T \quad (2.11)$$

Tabulka 2.2: Henryho konstanty pro rozpustnost plynů ve vodě v závislosti na teplotě^{2,3} [6]

	$K^{px}/10^9 \text{Pa}$						
t [°C]→	10	20	30	40	50	60	70
Dusík	6,77	8,15	9,36	10,6	11,4	12,1	12,6
Kyslík	3,32	4,05	4,81	5,43	5,96	6,37	6,72
Vodík	6,44	6,92	7,39	7,61	7,75	7,75	7,71
oxid uhlí- čitý	1,06	1,44	1,88	2,36	2,87	3,43	-

² V tabulce je použita Henryho konstanta K^{px} inverzní k H^{xp} .

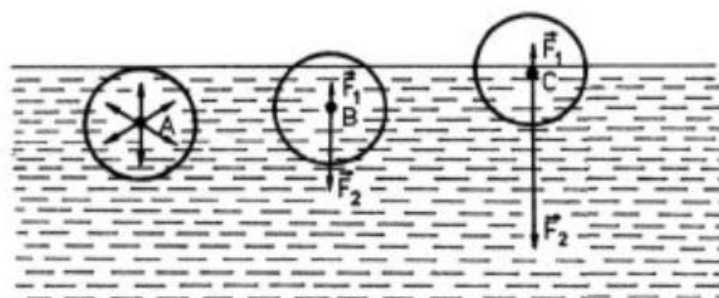
³ Obvykle velikost Henryho konstanty a s ní klesající rozpustnost roste až do bodu varu nebo i nad něj. U vodíku si lze všimnout, že k opětovnému navyšování rozpustnosti začne zase docházet přibližně kolem 60°C.

3. Tvorba a růst bublin v přesyceném roztoku

3.1. Povrchové napětí [4][12][13][22]

Povrchové napětí je vlastnost rozhraní mezi dvěma látkami. Tato vlastnost ovlivňuje řadu fyzikálních jevů, mezi nimi i tvorbu bublin.

Molekula kapaliny nacházející se uvnitř kapaliny je obklopena pouze molekulami dané kapaliny. Předpokládá-li se rovnoměrné rozložení molekul v kapalině, pak je silové působení ostatních molekul na danou molekulu ve všech směrech stejné. Naopak působení sil na molekulu na rozhraní (např. hladina voda – vzduch) už rovnoměrné není. Působení molekul kapaliny směrem dolů a do stran je stejné, ale působení sil od řidčeji rozložených a chaoticky se pohybujících molekul plynu směrem vzhůru je mnohem slabší, až zanedbatelné. Na molekulu na hladině tak působí výsledná síla F směrem dolů do kapaliny.



Obr. 3.1: Rozložení sil působících na molekulu v kapalině [4]

Má-li se molekula ze středu kapaliny dostat do povrchové vrstvy, je třeba působení této síly překonat. Musí tak na ní být vykonána práce. Z toho vyplývá, že molekuly v povrchové vrstvě kapaliny mají větší potenciální energii než mají molekuly uvnitř. Rozdíl mezi touto energií a energií uvnitř se nazývá energie povrchové vrstvy E_s .

Povrchové napětí σ se pak definuje energie povrchové vrstvy E_s vztažená na jednotku plochy rozhraní S_r :

$$\sigma = \frac{dE_s}{dS_r} \quad (3.1)$$

Druhým možným způsobem jak definovat povrchové napětí, je definovat ho jako poměr přitažlivých sil mezi molekulami v tečném směru F_t a délky rozhraní l :

$$\sigma = \frac{dF_t}{dl} \quad (3.2)$$

Systémy v přírodě mají vždy snahu mít co nejmenší energii. Stejně tak i povrchy mají snahu co nejvíce eliminovat energii povrchové vrstvy. Snaží se tedy zaujmout tvar, který má co nejmenší povrch v poměru s velikostí objemu. Tomuto požadavku nejvíce vyhovuje koule, proto mají tento tvar kapky i bubliny.

Tabulka 3.1: Povrchové napětí některých rozhraní při teplotě $t = 20^\circ\text{C}$ [12]

rozhraní $\sigma \text{ [N.m}^{-1}\text{]}$	voda-vzduch	rtuť-vzduch	rtuť-voda	olej-voda	olej-vzduch
	0,073	0,461	0,427	0,02	0,03

Povrchové napětí závisí zejména na teplotě, přičemž s rostoucí teplotou klesá.

Tabulka 3.2: Závislost povrchového napětí vody na teplotě [12]

t [°C]	10	20	40	60	80
σ [N.m ⁻¹]	0,0745	0,073	0,070	0,0669	0,0638

Dále velikost povrchového napětí ovlivňují také surfaktanty. To jsou látky, které porušují celistvost povrchové vrstvy a tím snižují hodnotu povrchového napětí. Příkladem takové látky je třeba jar.

3.1.1 Povrchové napětí bubliny [13][22]

Aby byla bublina v mechanické rovnováze, tak musí být síly způsobující smršťování bubliny (síla způsobená vnějším tlakem a síla povrchového napětí) vyrovnány opačně působící silou vyvolanou vnitřním tlakem:

$$F_{in} = F_{out} + F_{\sigma} \quad (3.3)$$

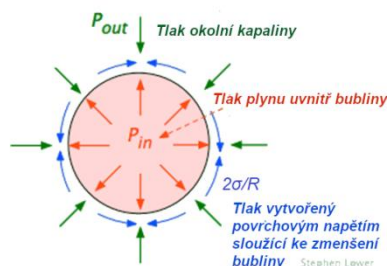
Po dosazení:

$$4\pi R_b^2 p_{in} = 4\pi R_b^2 p_{out} + 8\pi\sigma R_b \quad (3.4)$$

Úpravou se pak dostane vztah známý jako Laplaceova rovnice⁴⁵:

$$p_{in} = p_{out} + \frac{2\sigma}{R_b} \quad (3.5)$$

Tlak od povrchového napětí se běžně nazývá Laplaceův tlak a klesá s rostoucím poloměrem bubliny. Ze zákona tak vyplývá, že tlak uvnitř bubliny nutný pro její existenci je nepřímo úměrný velikosti bubliny. Neboli v malé bublince bude mnohem větší přetlak než ve velké bublině.



Obr. 3.2: Tlaky působící na bublinu [22]

⁴ Nebo také Young-Laplaceova rovnice. Thomas Young roku 1806 vytvořil teorii povrchového napětí, matematické popis nezávisle na něm vytvořil o rok později Pierre-Simon Laplace. Rovnice však vyřešil až Carl Friedrich Gauss v roce 1830.[25]

⁵ V češtině se trochu nešťastně používá pojem bublina. Bublina v pravém slova smyslu (např. z bublifuku) je oblast plynu uzavřená tenkým filmem. Taková bublina má potom dva povrchy vnitřní a vnější. Laplaceův tlak je pak dvojnásobný:

$$p_{in} = p_{out} + \frac{4\sigma}{R_b}$$

Vhodnějším termín pro bublinu v kapalině by tedy byl kavita nebo dutina. Nicméně zde i nadále bude pojem bublina označovat kavitu uvnitř kapaliny.[13][21]

3.2. Nukleace bublin [7]

K samovolné nukleaci bublin z roztoku za teploty okolo 20°C nemůže prakticky nikdy dojít, neboť stupeň přesycení nutný k takové nukleaci je $\zeta > 1000$ (pro srovnání šampaňské $\zeta = 5$). Aby děj mohl proběhnout, tak už musí v kapalině existovat nějaké vzduchové kapsy (bubliny), které pak slouží jako zárodky nukleace. Platí, že jejich poloměr R nesmí být menší než kritický poloměr R_C , jinak se rozpustí.

$$R_C = \frac{2\sigma}{p_{out}\zeta} \quad (3.6)$$

kde σ je povrchové napětí na rozhraní mezi kapalinou a plynem a p_{out} je tlak působící na bublinu.

Důvod, proč se bubliny rozpustí je dán velikostí koncentrace:

$$c_b = H^{cp} \left(p_{out} + \frac{2\sigma}{R_b} \right) \quad (3.7)$$

Z rovnice je vidět, že koncentrace na povrchu bubliny klesá s rostoucím poloměrem R_b . U malé bubliny je tak koncentrace plynu na povrchu větší než je jeho koncentrace na povrchu bubliny velké. Kritický poloměr R_C je takový poloměr, kdy je koncentrace plynu rozpuštěného v kapalině v rovnováze s koncentrací plynu na povrchu bubliny. Difuzní tok plynu pak u malé bubliny bude směrem do kapaliny, až bublina zanikne. Naopak u velké směrem dovnitř a bublina poroste.

Nejrůznější nerovnosti (drobné dutinky, rýhy nebo ulpělá špína) v nádobě s přesyceným roztokem pak působí jako nukleační místa pro vznik bublin. Uchycují se na nich nerozpuštěná částice vzduchu, a ty které nezaniknou pak fungují jako zárodky pro růst bublin.

Př. Tento jev je dobře pozorovatelný například ve špatně umyté sklenici s pivem.

3.3. Růst bublin [7]

Díky přesycenosti roztoku a jeho snaze dostat se do rovnovážného stavu dochází k difuzi plynu ven z kapaliny, a to buď volnou hladinou ven anebo dovnitř vznikající bubliny.

3.3.1 Difuze [8]

Difuze je děj, při kterém dochází k neuspořádanému pronikání částic jedné látky do druhé tak, aby výsledkem bylo jejich rovnoměrné zastoupení v celém objemu. Rychlost difuze a to zda vůbec bude probíhat, závisí především na rozdílu koncentrací v daných místech směsi (mezi dvěma místy s výrazným rozdílem koncentrací bude probíhat rychleji než mezi místy s podobnou koncentrací, po vyrovnání koncentrací ustane úplně). Dále také záleží na teplotě a u kapalin na viskozitě a vzájemné rozpustnosti.

Př. Jednoduchým známým příkladem difuze je slazení čaje medem nebo sirupem. V horkém čaji se med rozpustí rychleji než ve studeném. Sirup s menší viskozitou se v čaji rozpustí rychleji než med s viskozitou vyšší.

Matematicky je pak difuze popsána pomocí Fickových zákonů.⁶

⁶ Adolf Eugen Fick (3. 9. 1829 – 21. 8. 1901) byl německý lékař a psycholog. Roku 1855 publikoval své poznatky o difuzi dnes známé jako Fickovy zákony.[23]

3.3.2 1. Fickův zákon [8][9][10]

První Fickův zákon popisuje směr a hustotu proudu částic a říká, že *hustota difuzního toku je úměrná záporně vzatému gradientu koncentrace*:

$$J_A = -D \frac{\partial C_A}{\partial x} \quad (3.8)$$

J_A je difuzní tok a udává, kolik částic projde plochou za jednotku času. Gradient říká, ve kterém směru roste koncentrace a minus značí, že tok jde proti jejímu růstu, tedy že částice se přemísťují z místa s vyšší koncentrací do míst s koncentrací nižší. D je difuzní koeficient, který závisí na teplotě a koeficientu tření. Hodnotu udává Einsteinova rovnice:

$$D = \frac{k_B T}{f_t} \quad (3.9)$$

kde T je absolutní teplota v Kelvinech, k_B je Boltzmannova konstanta a f_t je koeficient tření, závisící na velikosti částic a prostředí.

Pro kulovité částice v kapalném prostředí je koeficient tření dán vztahem:

$$f_t = 6\pi\eta_0 r_p \left(\frac{2\eta_0 + r_p \beta}{3\eta_0 + r_p \beta} \right) \quad (3.10)$$

kde r_p je poloměr částice, η_0 dynamická viskozita prostředí a β koeficient skluzového tření.

Pro velké částice, kdy je možné kapalně prostředí považovat za kontinuum platí, že koeficient skluzového tření je tak velký, že je možné rovnici (3.10) přepsat do tvaru:

$$f_t = 6\pi\eta_0 r_p \quad (3.11)$$

Naopak pro malé částice srovnatelné s molekulami prostředí lze koeficient skluzového tření považovat za téměř nulový. Rovnice se tak zredukuje:

$$f_t = 4\pi\eta_0 r_p \quad (3.12)$$

Tabulka 3.3: Přehled některých difuzních koeficientů[24]

Plyn	Kapalina	Teplota (K)	Difuzní koeficient ($D \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$)
Vzduch	voda	293	2,5
CO ₂	voda	298	1,92
H ₂	voda	298	4,50
NH ₃	voda	285	1,64
CO ₂	ethanol	298	3,42
CO ₂	heptan	298	6,03

3.3.3 2. Fickův zákon (rovnice difuze) [8]

Charakterizuje změnu koncentrace v daném elementu objemu v čase. Můžeme si představit kostičku o průřezu S , do které z jedné strany vchází tok $J_A(x)$ a z druhé vychází $J_A(x+dx)$. Pak platí, že změna koncentrace v kostičce za čas se rovná rozdílu vtoku a výtoku:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = \frac{S}{S dx} [J_A(x) - J_A(x + dx)] \quad (3.13)$$

Pro výtok pak platí, že se rovná vcházejícímu toku plus změně toku v závislosti na poloze:

$$J_A(x + dx) = J_A(x) + \left(\frac{\partial J_A}{\partial x}\right) dx \quad (3.14)$$

Dosadíme-li pak do předchozí rovnice s použitím rovnice prvního Fickova zákona, lze po úpravě získat rovnici difuze:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} \quad (3.15)$$

3.3.4 Rovnice difuze v proudící kapalině [3]

V proudící kapalině nebude rychlost pronikání plynu do bubliny záviset pouze na rozdílu koncentrací, ale také na rychlosti proudění okolní kapaliny. Proto je třeba k rovnici difuze (3.15) připojit další člen zohledňující rychlostní pole proudu kapaliny. Pro nejjednodušší případ jednorozměrného proudění, kdy je rychlostní pole v čase neměnné a předpokládá-li se stejná rychlost nezávisle na výšce y , lze rovnici difuze pro proudící kapalinu zapsat ve tvaru:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} + U \frac{\partial C_A}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C_A}{\partial x^2} \quad (3.16)$$

3.3.5 Rovnice růstu bublin [14]

Růst bubliny je řízen difuzním tokem. Od této chvíle se pro další popis předpokládá, že difuzní tok je v čase neměnný:

$$J_A = D \frac{c_\infty - c_b}{R_b} \quad (3.17)$$

Po delší době od počátku růstu je poloměr R_b bubliny natolik velký, že lze Laplaceovu sílu vlivem zakřivení bubliny zanedbat. Potom platí, že na povrchu bubliny se vnitřní tlak p_{in} bude rovnat vnějšímu tlaku p_{out} . Stejně tak se bude rovnat koncentrace plynu v roztoku u povrchu bubliny c_b s rovnovážnou koncentrací plynu v kapalině pro daný tlak c_n . Z toho plyne, že koncentrace plynu v bublině je konstantní nezávisle na velikosti bubliny. Pomocí stavové rovnice ideálního plynu to lze vyjádřit jako:

$$n_g = \frac{p_{out}}{k_b T} \quad (3.18)$$

Pro nejjednodušší formu Henryho zákona je rovnovážná koncentrace rozpuštěného plynu v kapalině proporční s korespondujícím tlakem:

$$\frac{c_b}{c_n} = \frac{p_{in}}{p_{out}} \quad (3.19)$$

Pro ideální plyn lze počet molekul plynu v bublině N v závislosti na poloměru bubliny R_b vyjádřit vztahem:

$$N = \frac{4\pi}{3k_b T} R_b^3 \left[p_{out} + \frac{2\sigma}{R_b} \right] \quad (3.20)$$

Pro v čase proměnný poloměr lze pak rovnici upravit do diferenciálního tvaru s využitím charakteristického rozměru bubliny R_σ :

$$\frac{dN}{dt} = 4\pi n_g R_b^2 \frac{dR_b}{dt} \left[1 + \frac{R_\sigma}{R_b} \right] \quad (3.21)$$

Charakteristický rozměr bubliny je definován jako:

$$R_\sigma = \frac{4\sigma}{3p_{out}} = \frac{2}{3}\zeta R_c \quad (3.22)$$

Rovnováhu mezi rozpuštěným plynem v kapalině a plynem v rostoucí bublině lze zapsat:

$$\frac{dN}{dt} = 4\pi R_b^2 J_A \quad (3.23)$$

Dosazením vztahů (3.17) a (3.21) do rovnice (3.23) se pak získá vztah:

$$n_g \frac{dR_b}{dt} \left[1 + \frac{R_\sigma}{R_b} \right] = D \frac{c_\infty - c_b}{R_b} \quad (3.24)$$

Který je ekvivalentní se vztahem:

$$R_b \dot{R}_b \left[1 + \frac{R_\sigma}{R_b} \right] = Ds \frac{c_\infty - c_b}{c_n} \quad (3.25)$$

Kde s je rozpustnost plynu v kapalině definovaná jako:

$$s = \frac{k_b T c_n}{p_{out}} \quad (3.26)$$

Úpravou pravé strany pak lze získat rovnici popisující růst bubliny:

$$R_b \dot{R}_b \left[1 + \frac{R_\sigma}{R_b} \right] = Ds \left[\zeta - \frac{3R_\sigma}{2R_b} \right] \quad (3.27)$$

3.3.6 Stadia růstu bubliny [14][15]

Růst bubliny lze rozdělit do tří stádií podle velikosti poloměru. V závislosti na těchto stádiích se pak mění rychlost růstu bubliny.

Od teď se uvažuje další předpoklad, že poloměr bubliny se nemůže v čase vlivem fluktuací zmenšit, tedy růst je nevratný. Protože vliv fluktuací těsně nad kritickým poloměrem R_c je značný, tak aby bylo jejich zanedbání korektní, je uvažován jako počáteční poloměr:

$$R_{t=0} = 2R_c \quad (3.28)$$

Doba trvání prvního stádia je vzhledem k době trvání druhého stádia tak krátká, že je klidně možné tuto úpravu použít.⁷

Pro další postup je vhodné přepsat rovnici růstu bubliny do následujícího tvaru:

$$\dot{R}_b = Ds\zeta \left(1 - \frac{R_c}{R_b} \right) \frac{1}{R_b} \left(\frac{1}{1 + R_\sigma/R_b} \right) \quad (3.29)$$

⁷ Viz 2.3.6 Doba trvání jednotlivých stádií

Z rovnice je vidět, že člen $(1-R_c/R_b)$ odpovídající hnací síle procesu ($c_\infty-c_b$) se s rostoucím poloměrem zvětšuje, člen $1/R_b$ týkající se snižování gradientu koncentrace u povrchu bubliny s rostoucím poloměrem zmenšuje a člen $1/(1+R_c/R_b)$ zahrnující do vztahu Laplaceovu sílu se zvětšuje.

První stádium je charakteristické zvětšováním rychlosti růstu poloměru bubliny. Poloměr R_b pak náleží intervalu:

$$2R_c \leq R_b \leq R_m \quad (3.30)$$

Kde R_m je hodnota poloměru v okamžiku kdy se rychlost růstu bubliny přestane zvětšovat:

$$\frac{d\dot{R}_b}{dR_{b=R_m}} = 0 \quad (3.31)$$

Úpravou rovnice (3.29) a její následnou derivací podle R_b se získá vztah:

$$\frac{d\dot{R}_b}{dR_b} = Ds\zeta \frac{R_c(R_c + R_\sigma) - (R_b - R_c)^2}{R_b^2(R_b + R_\sigma)^2} \quad (3.32)$$

Spojením rovnic (3.31) a (3.32) se pak získá rovnice pro R_m jako:

$$R_m = R_c + (R_c^2 + R_c R_\sigma)^{1/2} \quad (3.33)$$

Protože je $R_\sigma \gg R_c$ lze rovnici zjednodušit:

$$R_m \approx (R_c R_\sigma)^{1/2} \quad (3.34)$$

Pro rychlosti růstu bubliny v hraničních bodech intervalu pak platí:

$$\dot{R}_{b=2R_c} = \frac{Ds\zeta}{2R_\sigma} \left(\frac{1}{1 + 2R_c/R_\sigma} \right) \approx \frac{Ds\zeta}{2R_\sigma} \quad (3.35)$$

$$\dot{R}_{b=R_m} = \frac{Ds\zeta}{R_\sigma} \left(\frac{1 - (R_c/R_\sigma)^{1/2}}{1 + (R_c/R_\sigma)^{1/2}} \right) \approx \frac{Ds\zeta}{R_\sigma} \quad (3.36)$$

Z uvedených rovnic je vidět, že rychlost růstu bubliny na konci prvního stádia je oproti rychlosti růstu na počátku dvojnásobná.

Druhé stádium je charakterizováno zpomalováním rychlosti růstu navzdory klesajícímu vlivu Laplaceovy síly. Poloměr R_b pak náleží intervalu:

$$R_m \leq R_b \leq R_\sigma \quad (3.37)$$

Protože $R_b \gg R_c$ je hnací síla $c_\infty-c_b$ prakticky konstantní. Rovnici vyjadřující rychlost růstu lze tak zapsat ve tvaru:

$$\dot{R}_{b=R_\sigma} = \frac{Ds\zeta}{2R_\sigma} (1 - R_c/R_\sigma) \approx \frac{Ds\zeta}{2R_\sigma} \quad (3.38)$$

Třetí stádium navazuje na druhé a probíhá až do momentu odtržení bubliny. Stále probíhá monotónní zpomalování rychlosti růstu bubliny. Vliv Laplaceovy síly na tlak v bublině stále klesá. Tlak v bublině pak lze od určitého okamžiku považovat za konstantní.

3.3.7 Závislost poloměru bubliny na čase [14]

Přepsáním rovnice (3.27) do tvaru vhodného k integraci se získá rovnice:

$$R_b \dot{R}_b + (R_\sigma + R_c) \dot{R}_b + (R_\sigma + R_c) R_c \frac{\dot{R}_b / R_c}{R_b / R_c - 1} = Ds\zeta \quad (3.39)$$

Její integrací se pak dostane:

$$\frac{R_b^2}{2} + (R_\sigma + R_c) R_b + (R_\sigma + R_c) R_c \ln \left(\frac{R_b}{R_c} - 1 \right) = Ds\zeta(t + \tau) \quad (3.40)$$

Kde τ je časová konstanta definovaná pro počáteční hodnotu poloměru v čase $t = 0$. Dosazením počátečních podmínek (3.28) do rovnice se pro ni získá vztah:

$$\tau = \frac{2R_c(R_\sigma + 2R_c)}{Ds\zeta} \quad (3.41)$$

Vyloučením časové konstanty z předcházející rovnice, lze získat závislost poloměru na čase jako:

$$\frac{R_b^2 - 4R_c^2}{2} + (R_\sigma + R_c)(R_\sigma - 2R_c) + (R_\sigma + R_c) R_c \times \ln \left(\frac{R_b}{R_c} - 1 \right) = Ds\zeta t \quad (3.42)$$

Rovnice v tomto tvaru platí pro všechna tři stádia růstu bubliny, nicméně s růstem poloměru bubliny se hodnoty některých členů vzhledem k poloměru bubliny stávají čím dál více zanedbatelnějšími, takže lze rovnici psát i v jednodušších podobách. Pro třetí stádium pak lze zanedbat celý třetí člen rovnice a rovnice se zredukuje do tvaru:

$$\frac{R_b^2}{2} + R_\sigma R_b = Ds\zeta t \quad (3.43)$$

3.3.8 Doba trvání jednotlivých stádií [14][15]

Při odvození vztahů se předpokládá, že platí nerovnost:

$$R_c \ll R_m \ll R_\sigma \quad (3.44)$$

První stádium: dosazením hodnoty R_m na konci stádia za R_b do rovnice (3.42), lze získat vztah pro dobu trvání prvního stádia:

$$t_1 = \frac{R_\sigma^2}{Ds\zeta} \left(\frac{R_c}{R_\sigma} \right)^{1/2} \quad (3.45)$$

Dosazením za rovnice (3.22) za R_c se získá vztah:

$$t_1 = \left(\frac{3}{2} \right)^{1/2} \frac{R_\sigma^2}{Ds\zeta^{3/2}} \quad (3.46)$$

Druhé stádium: dosazením do (3.42) R_σ za R_b se získá doba do konce druhého stádia:

$$t_2 = \frac{3}{2} \frac{R_\sigma^2}{Ds\zeta} \quad (3.47)$$

Doba trvání druhého stádia by se pak získala rozdílem časových bodů t_2 a t_1 .

Třetí stádium: třetí stádium růstu není shora ohraničené. Pro znázornění trvání třetího stádia lze použít poloměr bubliny R_0 , jehož charakteristickou vlastností je, že v okamžiku jeho dosažení nemá Laplaceova síla v bublině už prakticky žádný vliv. Poloměr R_0 je definován jako:

$$R_0 = 20 \cdot \frac{2\sigma}{p_{\text{out}}} \quad (3.48)$$

Dosažením do rovnice (3.43) lze pak získat čas t_3 potřebný k dosažení tohoto poloměru:

$$t_3 \cong 480 \frac{R_\sigma^2}{Ds\zeta} \quad (3.49)$$

Pro poměr časů t_1 , t_2 , t_3 pak platí:

$$\frac{t_2}{t_1} = \left(\frac{3\zeta}{2}\right)^{1/2} \gg 1 \quad (3.50)$$

$$\frac{t_3}{t_2} \cong 320 \quad (3.51)$$

Z uvedených srovnání pak lze vidět, že doby trvání prvních dvou stádií jsou nepatrné s časem třetího stádia. Až na malý okamžik na počátku, tak celý růst bubliny probíhá ve třetím stádiu. Lze tedy pozorovat monotónní zpomalování růstu bubliny.

Definuje – li se Δt jako čas růstu poloměru bubliny z $1,1R_c$ do $2R_c$, pak dosažením za R_b do rovnice (3.40) $R_b = 1,1R_c$ a $R_b = 2R_c$ a jejich následným odečtením se získá vztah:

$$1,4R_c^2 + 3,2R_cR_\sigma = Ds\zeta\Delta t \quad (3.52)$$

S využitím nerovnice (3.44) pak lze výraz upravit:

$$\Delta t = 3,2 \frac{R_\sigma R_c}{Ds\zeta} \quad (3.53)$$

Porovnáním Δt a t_1 z rovnice (3.46) pak lze zjistit jaká nepřesnost vznikne uvažováním počátečního poloměru R_b jako $R_b = 2R_c$:

$$\frac{\Delta t}{t_1} = 3,2 \left(\frac{3}{2\zeta}\right)^{1/2} \quad (3.54)$$

U uvažovaného stupně přesycení $\zeta = 1000$ pak $\Delta t/t_1 \approx 0,1$. Z prvního stádia je tak ubráno asi 10% času. To je poměrně velké zkreslení zvláště pokud by se zkoumalo samotné první stádium, nicméně jak bylo ukázáno výše (3.50) a (3.51) s ohledem na celý čas růstu bubliny je tato ztráta zanedbatelná.

3.4. Odtržení bubliny

3.4.1 Odtržení v klidném roztoku [11]

V klidném roztoku dojde k odtržení v okamžiku, kdy vztlaková síla bubliny překoná sílu povrchového napětí, která drží bublinu u trhliny. Odtržená kulová bublina je pak charakterizována svým průměrem d_b a svou hmotností m_b .

Vztlaková síla je definovaná pomocí Archimédova zákona (viz 4.1.1). Pro kulovou bublinu pak platí následující vzorce pro vztlakovou sílu a sílu povrchového napětí:

$$F_{vz} = \frac{1}{6} \pi d_b^3 \rho_l g \quad (3.55)$$

$$F_\sigma = \pi d_o \sigma \quad (3.56)$$

kde ρ_l je hustota kapaliny, g je tíhové zrychlení, d_o je průměr trhliny a σ povrchové napětí.

Z rovnic lze pak jednoduše získat závislost objemu utržené bubliny na velikosti trhliny, ve které vznikala:

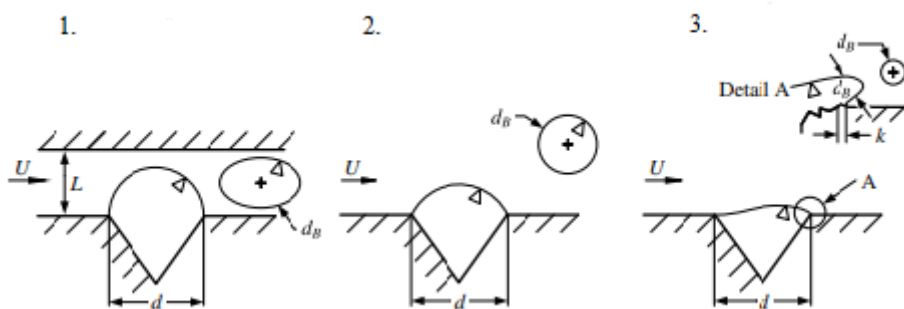
$$V_b = \frac{\pi d_o \sigma}{\rho_l g} \quad (3.57)$$

3.4.2 Odtržení bubliny v proudu [3]

Pokud uvažujeme trhlinu o velikosti v řádu milimetrů, pak v proudící kapalině na rozdíl od předchozího případu klidné kapaliny hraje vztlaková síla jen velmi malou roli. Odtržení bubliny od povrchu způsobí dynamická síla proudu, která opět musí vyrovnat resp. překonat přitažlivou sílu povrchového napětí:

$$F_d = \rho_l U^2 l_{ch}^2 \quad (3.58)$$

Dynamická síla je charakterizována hustotou kapaliny ρ_l , rychlostí proudu U a charakteristickou délkou b . Charakteristická délka l_{ch} může být v závislosti na dané situaci proudění například průměr trubice nebo trysky L , ve které probíhá proudění, průměr trhliny d , průměr bubliny d_b , nebo délka elementu povrchu k charakterizující geometrii hran trhliny, ve které vzniká bublina.



Obr. 3.3: Charakteristické délky (upraveno z [3])

Kulová bublina je opět charakterizována svou hmotností m_b a svým průměrem d_b . V případě nekulové bubliny, pak průměr d_b charakterizuje kulovou bublinu o stejném objemu jako má nekulová bublina.

3.4.3 Frekvence odtržení bublin [3]

Hmotnostní tok je hmotnost tekutiny, která proteče danou plochou za čas:

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} \quad (3.59)$$

Podle prvního Fickova zákona lze tuto rovnici upravit do tvaru popisující hmotnostní tok přes malý element povrchu bubliny v závislosti na koncentraci:

$$\dot{m} = -MD \int_S \nabla c \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.60)$$

kde M je molární hmotnost, D difuzní koeficient, ∇c gradient koncentrace, \mathbf{n} normálový vektor k povrchu a dS element plochy povrchu bubliny.

Nemění-li se po určitý čas výrazně koncentrace roztoku, lze říci, že hmotnostní tok plynu do bubliny bude konstantní, respektive bude se měnit v závislosti na změně velikosti bubliny, ale pro všechny bubliny to bude stejně.

A vzhledem k tomu, že k odtržení bubliny musí být vždy překonána síla povrchového napětí, která je pro danou trhlínu konstantní, lze uvažovat, že objemy resp. hmotnosti odtržených bublin z určité trhliny budou vždy stejné. K odtržení bubliny pak tedy dojde v okamžiku, kdy bublina dosáhne určité hmotnosti.

Frekvenci vzniku trhlín pak vyjadřuje poměr mezi hmotnostním tokem do bubliny \dot{m} a hmotností odtržené bubliny m_b :

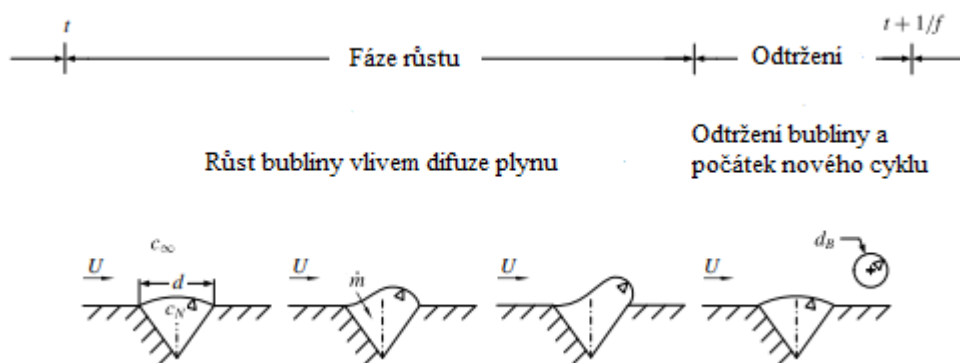
$$f = \frac{\dot{m}}{m_b} \quad (3.61)$$

Hmotnost odtržené bubliny lze určit dosazením za koncentraci do Henryho zákona:

$$\frac{n_A}{V_b} = H^{cp} p \quad (3.62)$$

a protože $n_A = (m_b/M)$, tak výsledný vztah pro hmotnost bubliny je:

$$m_b = pH^{cp}MV_b \quad (3.63)$$



Obr. 3.4: Periodicky se opakující vznik bublin v proudící kapalině (upraveno z [3])

4. Stoupání bublin v kapalině [11][16]

Z prvního Newtonova zákona plyne, že *pokud na těleso nepůsobí žádné síly nebo je jejich výslednice nulová, tak si těleso zachovává svoji dosaženou rychlost. Pokud však tyto dvě podmínky nejsou splněny, tak těleso zrychluje nebo zpomaluje*, jak uvádí druhý Newtonův zákon.

Obecně pro všechna tělesa, která stoupají nebo klesají v gravitačním poli, platí, že jejich rychlost je konstantní v okamžiku kdy:

$$\text{vztlaková síla} + \text{odporová síla} + \text{tíhová síla} = 0$$

Proto také bublina odtržená ode dna nestoupá od počátku konstantní rychlostí, nýbrž nejprve zrychluje a až po vyrovnaní působících se začne pohybovat konstantně.

4.1. Síly působící na bublinu

4.1.1 Vztlaková síla [16]

Vztlaková síla působí směrem vzhůru a je tak hnací silou stoupání bubliny.

Na ponořené koule do kapaliny působí hydrostatický tlak. Nicméně na horní polokouli, která je blíže k hladině, působí nižší sloupec kapaliny než na spodní, která je ponořena hlouběji. Proto síla působící na kouli shora je menší než síla působící zdola. Rozdílem těchto dvou sil je vztlaková síla, která je hnací silou postupu bubliny vzhůru.

Obecně je vztlaková síla definovaná pomocí Archimédova zákona, který říká, že *těleso ponořené do tekutiny je nadlehčováno silou, která je stejně velká jako váha tekutiny stejného objemu, jako je objem ponořené části tělesa*.

Vztah pro vztlakovou sílu pak lze napsat jako:

$$F_{VZ} = m_l g \quad (4.1)$$

kde m_l je hmotnost kapaliny vytlačené bublinou a g tíhové zrychlení. Dosazením za hmotnost lze pak vyjádřit velikost vztlakové síly v závislosti na objemu bubliny:

$$F_{VZ} = \rho_l V_b g \quad (4.2)$$

kde ρ_l je hustota kapaliny a V_b objem bubliny.

4.1.2 Tíhová síla [16]

Tíhová síla působí směrem dolů a je definována jako:

$$F_g = m_b g \quad (4.3)$$

kde m_b je hmotnost bubliny. Rovnici opět lze přepsat do tvaru obsahující objem bubliny:

$$F_g = \rho_g V_b g \quad (4.4)$$

kde ρ_g je hustota plynu v bublině.

Porovnáním rovnic (4.2) a (4.4) lze vidět, že pokud je hustota kapaliny větší než hustota plynu, tak je i vztlaková síla větší než síla gravitační. Proto taky bublina stoupá vzhůru.

4.1.3 Odporové síly [17]

Odporové síly nemají vliv na to zda bude bublina stoupat nebo klesat, ale pouze působí proti směru pohybu ať už nahoru nebo dolů. Mezi odporové síly zejména patří: síla odporu prostředí F_D , síla přidané (virtuální) hmotnosti F_V a Bassetova síla F_H někdy též nazývána jako síla historická.

Síla odporu prostředí [12][19]

Síla odporu prostředí vzniká působením tlaku a viskózního napětí na povrch bubliny. Její velikost je zejména ovlivněna režimem proudění, který je určen pomocí Reynoldova čísla Re :

$$F_D = f(Re) \quad (4.5)$$

Ve většině případů se síla odporu prostředí skládá ze dvou složek. První složkou je třecí odpor F_T , který vyjadřuje účinek tečných napětí v mezní vrstvě na povrchu tělesa. Druhou je tlakový odpor F_P , vznikající odtržením mezní vrstvy. Při odtržení dojde k deformaci průběhu tlaku kolem obtékaného tělesa. V přední části tělesa vznikne přetlak naopak v oblasti zpětného proudění podtlak. Důsledkem této nerovnoměrnosti je pak zmíněný tlakový odpor:

$$F_D = F_T + F_P \quad (4.6)$$

$$F_T = \frac{1}{2} \rho_l c_t S_t w^2 \quad (4.7)$$

kde c_t je součinitel třecího odporu a S_t omočená plocha tělesa.

$$F_P = \frac{1}{2} \rho_l c_p S_p w^2 \quad (4.8)$$

kde c_p je součinitel tlakového odporu, S_p charakteristická plocha kolmá na rychlost proudu.

Tyto dvě síly však nelze odděleně určit měřením ani výpočtem. Proto se pomocí experimentu určuje až celkový odpor, k jehož vyjádření se používá Newtonův vztah:

$$F_D = \frac{1}{2} \rho_l c_D S w^2 \quad (4.9)$$

kde S je plocha průmětu tělesa do směru rychlosti proudu a c_D je součinitel odporu určený experimentálně.

Při nízkých Reynoldsových číslech ($Re < 1$) dochází k lepšímu obtékání částice kapalinou, kdy nedochází k výraznému odtržení mezní vrstvy. Toto proudění se někdy nazývá jako tzv. plíživé proudění. Pro odpor nerotující kulové částice v klidu byla odvozena Stokesova rovnice:

$$F_D = 6\pi r_p \eta_l U \quad (4.10)$$

skládající se ze sil:

$$F_T = 4\pi r_p \eta_l U \quad (4.11)$$

$$F_P = 2\pi r_p \eta_l U \quad (4.12)$$

kde r_p je poloměr částice, η_l dynamická viskozita kapaliny a U rychlost proudění kapaliny.

Pro pohyb bubliny o průměru d_b pohybující se rychlostí w lze Stokesovu rovnici přepsat do tvaru:

$$F_D = -3\pi d_b \eta_l w \quad (4.13)$$

kde w je relativní rychlost mezi rychlostí kapaliny a bubliny ($w = U - v_b$). Znaménko minus značí, že síla působí proti pohybu bubliny.

Síla přidané (virtuální) hmotnosti [18][19]

Bublina během stoupání rozráží okolní kapalinu. Nicméně protože bublina je neprůchozí, část molekul kapaliny je bublinou urychlována se stejným zrychlením jako bublina a unášena směrem vzhůru. Hmotnost těchto molekul pak působí jako další zátěž na bublinu.

Definice síly vychází z druhého Newtonova zákona:

$$F_V = c_V \rho_l V_b \left(\frac{dU}{dt} - \frac{dv_b}{dt} \right) \quad (4.14)$$

kde c_V je koeficient virtuální hmotnosti a člen v závorce ($dU/dt - dv_b/dt$) je rozdíl mezi zrychlením prostředí ve kterém se bublina pohybuje a zrychlením bubliny.

Je vidět, že velikost této síly roste s rozdílem zrychlení bubliny a kapaliny. Během zrychlování bubliny její velikost postupně klesá. V okamžiku, kdy přestane bublina zrychlovat a dojde k ustálené rychlosti stoupání, zcela zanikne.

Koeficient virtuální hmotnosti závisí především na tvaru bubliny. Pro kulovou bublinu se $c_V=0,5$.

Pro trojrozměrné částice se obvykle celá část před závorkou z rovnice (4.14) zapisuje pomocí matice přidaných hmotností M_{ii} . Hodnoty matic pro některé tvary bublin uvádí tabulka 6:

Tabulka 4.1: Hodnoty matic přidaných hmotností [18]

Tvar částice	Maticový element	Hodnota		
Koule	M_{ii}	$\frac{2}{3} \rho_l \pi R^3$		
Disk	M_{11}	$\frac{8}{3} \rho_l \pi R^3$		
Elipsoid	$M_{ii} = K_{ii} \frac{4}{3} \rho_k \pi a b^2$	a/b	K_{11}	$K_{22}(K_{33})$
		2	0,209	0,702
		5	0,059	0,895
		10	0,021	0,960

Pozn. 1: Pokud by se u kulové částice vyjádřila hodnota maticového elementu pomocí objemu koule, byla by konstanta před výrazem $\frac{1}{2}$, což koresponduje s koeficientem virtuální hmotnosti $c_V = 0,5$.

Pozn. 2: Elipsoid má hlavní poloosu a a vedlejší poloosu b . Směr 1 je pro pohyb ve směru hlavní poloosy a .

Bassetova (historická) síla [19]

Bassetova síla vzniká změnou rozložení tloušťky mezní vrstvy. Během změny rychlosti dochází vlivem viskozity kapaliny k tomu, že povrchová vrstva na čele částice narůstá, naopak na bocích se ztenčuje. Tato změna vzniká se zpožděním v závislosti na zrychlení, proto se síla nazývá též historická.

Rovnice pro výpočet Basetovy síly kulové částice je:

$$F_H = -\frac{3}{2}d^2\sqrt{\pi\rho_l\eta_l}\left[\int_0^l\left(\frac{dw}{d\tau}\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\right)d\tau + \frac{w_{t=0}}{\sqrt{t}}\right] \quad (4.15)$$

Bassetova síla nemá pro Reynoldsova čísla pohybující se částice větší než jedna analytické řešení. Ve většině případů je však zanedbatelná.

4.2. Odporový koeficient [17]

Součet odporových sil lze označit jako celkovou odporovou sílu F_{TD} :

$$F_{TD} = F_D + F_V + F_H \quad (4.16)$$

Odpor proti pohybu bubliny se pak vyjadřuje pomocí odporového koeficientu C_D :

$$C_D = \frac{F_{TD}}{\left(\frac{1}{2}\rho_l v_T^2\right)\left(\frac{\pi}{4}d_{eq}^2\right)} = \frac{4}{3}d_{eq}\frac{(\rho_l - \rho_g)g - \rho_g\frac{dv_T}{dt}}{\rho_l v_T^2} \quad (4.17)$$

kde v_T je maximální rychlost bubliny při ustáleném pohybu získaná experimentálně a d_{eq} ekvivalentní průměr bubliny, který závisí na ploše průmětu bubliny S_0 :

$$d_{eq} = \sqrt{\frac{4S_0}{\pi}} \quad (4.18)$$

Hodnota odporového koeficientu závisí na mnoha faktorech. Zejména pak na tvaru a velikosti bubliny, typu proudění a čistotě prostředí.

Pro jednodušší výpočty bývá jeho hodnota často vyjádřena pomocí podobnostních čísel.⁸ Používaná podobnostní čísla jsou Reynoldsovo Re , Eötvösovo Eo , Weberovo We a Mortonovo podobnostní číslo Mo . Některé korelace jsou uvedeny v tabulce 6. Zvolené vztahy jsou vybrány zejména proto, že jsou aplikovatelné pro široké spektrum možných prostředí a velikostí bublin, různě znečištěné roztoky a navíc jsou použitelné pro velké rozpětí Reynoldsova čísla.

⁸Definiční vztahy použitých podobnostních čísel: $Re = \rho_l v_T d / \mu_l$; $Eo = g d^2 (\rho_l - \rho_g) / \sigma$; $We = \rho_l v_T^2 d / \sigma$; $Mo = (\rho_l - \rho_g) g \mu_l^4 / \sigma^3 \rho_l^2$ [20]

Tabulka 4.2: Některé korelace pro odporový koeficient [17]

Autor/ři	Vztah	
Peebles a Garber	$C_D = \max \left\{ \max \left[\frac{24}{Re}, \frac{18,7}{Re^{0,68}} \right]; \min [0,0275 Eo We^2; 0,82 Eo^{0,25} We^{0,5}] \right\}$	(4.19)
Ishii a Zuber	$C_D = \max \left\{ \frac{24}{Re} (1 + 0,1 Re^{0,75}); \min \left[\frac{8}{3}; \frac{2}{3} \sqrt{Eo} \right] \right\}$	(4.20)
Tomiya a kol.	$C_D = \max \left\{ \min \left(\frac{24}{Re} (1 + 0,15 Re^{0,678}); \frac{48}{Re} \right); \frac{8}{3} \frac{Eo}{Eo + 4} \right\}$	(4.21)
	$C_D = \max \left\{ \min \left(\frac{24}{Re} (1 + 0,15 Re^{0,678}); \frac{72}{Re} \right); \frac{8}{3} \frac{Eo}{Eo + 4} \right\}$	(4.22)
	$C_D = \max \left\{ \frac{24}{Re} (1 + 0,15 Re^{0,678}); \frac{8}{3} \frac{Eo}{Eo + 4} \right\}$	(4.23)
Rodrigue	$C_D = \frac{16}{Re} \left[\left(\frac{1}{2} + 32\theta + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 128\theta} \right)^{1/3} + \left(\frac{1}{2} + 32\theta - \frac{1}{2} \sqrt{1 + 128\theta} \right)^{1/3} + 0,036 \left(\frac{128}{3} \right)^{1/9} Re^{8/9} Mo^{1/9} \right]^{9/4}$	(4.24)
	$\theta = 0,018^3 (2/3)^{1/3} Re^{8/3} Mo^{1/9}$	(4.25)

Pozn.: Rovnice (4.19) a (4.20) jsou aplikovatelné pouze pro kontaminované systémy. Rovnice (4.21), (4.22) a (4.23) popisují různě znečištěné systémy: (4.21) čisté, (4.22) lehce znečištěné, (4.23) výrazně znečištěné. Rovnice (4.24) pak může být pro využita pro široké spektrum velikostí bublin a hodnot Reynoldsových a Mortonových čísel.

4.3. Maximální rychlost pohybu bubliny [11][20]

Vezmou-li se v úvahu výše uvedené síly, pak pro pohyb bubliny platí následující pohybová rovnice:

$$\rho_g V_b \frac{dv_T}{dt} = F_{VZ} - F_g - F_{TD} \quad (4.26)$$

Pro ustálený pohyb platí, že zrychlení je nulové. Rovnice se tedy zredukuje:

$$F_{VZ} - F_g - F_{TD} = 0 \quad (4.27)$$

Převedením odporové síly na druhou stranu rovnice a následním dosazením za jednotlivé členy se pro kulovou bublinu získá vztah:

$$(\rho_l - \rho_g) g \frac{1}{6} \pi d_b^3 = C_D \frac{1}{2} \rho_l v_T^2 \frac{\pi d_b^2}{4} \quad (4.28)$$

Z něj lze jednoduše vyjádřit maximální rychlost bubliny jako:

$$v_T = \sqrt{\frac{4 d_b (\rho_l - \rho_g) g}{3 \rho_l C_D}} \quad (4.29)$$

Nevýhodou tohoto vztahu je nutnost znát odporový koeficient. Bez jeho znalosti lze použít různé variace rovnic, nicméně podobně jako u odporového koeficientu, je vhodnost jejich použití omezena velikostí bubliny, čistotou prostředí atd.

Pro malé bubliny uvažované jako pevné koule je vhodné použít Stokesův vztah:

$$v_T = \frac{(\rho_l - \rho_g)}{18\eta_l} g d_b^2 \quad (4.30)$$

Odpor tekutého tělesa v kapalině je díky možnosti deformace obvykle menší než odpor tělesa tuhého. Pokud je malá bublina považována za tekutou kouli používá se vztah podle Habermana a Mortona:

$$v_T = \frac{(\rho_l - \rho_g)}{18\eta_l} g d_b^2 \left[\frac{3\eta_l + 3\eta_g}{2\eta_l + 3\eta_g} \right] \quad (4.31)$$

Pro středně velké bubliny v čistých roztocích se hodí použít Mendelsonův vztah:

$$v_T = \sqrt{\frac{2\sigma}{d_b(\rho_l + \rho_g)} + \frac{(\rho_l - \rho_g) g d_b}{\rho_l}} \quad (4.32)$$

Pro velké bubliny pak byl stanoven vztah Rogerem a Taylorem jako:

$$v_T = 0,707 \sqrt{g d_b} \quad (4.33)$$

4.4. Růst bubliny během pohybu v kapalině [28][29]

Změnu počtu molekul v bublině v závislosti na čase lze vyjádřit v závislosti na hmotnostním toku plynu do bubliny:

$$\frac{dN}{dt} = K S_b (c_\infty - c_b) \quad (4.34)$$

Kde K je koeficient přestupu hmoty závisující na Pecletově čísle Pe a Sherwoodově čísle Sh . Pro velikosti čísel odpovídající pohybu malé bubliny v přesycené kapalině pak pro K platí vztah:

$$K \approx 0,63 D^{2/3} \frac{U^{1/3}}{R_b^{2/3}} \quad (4.35)$$

Pro ideální plyn pak lze s využitím stavové rovnice plynu psát:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{p_{out}}{RT} \frac{dV_b}{dt} = \frac{p_{out}}{RT} S_b \frac{dR_b}{dt} \quad (4.36)$$

Kombinací rovnic (4.34) a (4.36) pak lze vyjádřit změnu poloměru bubliny v čase jako:

$$\frac{dR_b}{dt} = 0,63 D^{2/3} \frac{U^{1/3}}{R_b^{2/3}} \frac{RT}{p_{out}} (c_\infty - c_b) \quad (4.37)$$

S využitím Stokesovy rovnice (4.30) lze rovnici (4.37) upravit:

$$\frac{dR_b}{dt} = 0,63 D^{2/3} \left(\frac{2(\rho_l - \rho_g)g}{9\eta_l} \right)^{1/3} \frac{RT}{p_{out}} (c_\infty - c_b) \quad (4.38)$$

Ze vztahu je vidět, že rychlost růstu bubliny se v čase nemění:

$$\frac{dR_b}{dt} = k = konst. \quad (4.39)$$

Pro poloměr bubliny během stoupání vzhůru tedy platí:

$$R_b = R_d + kt \quad (4.40)$$

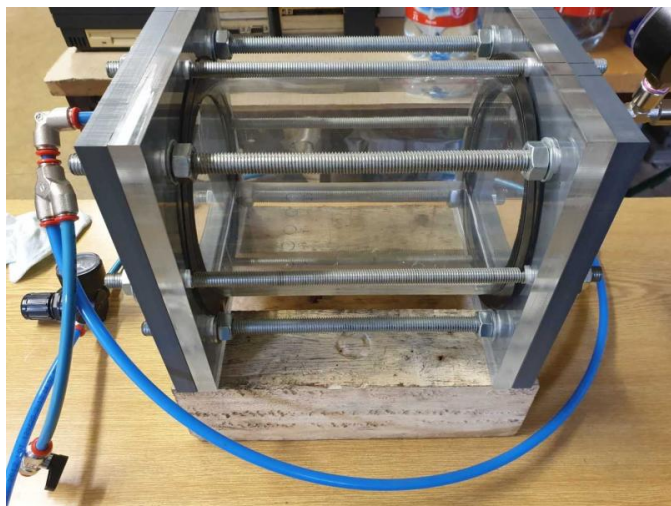
5. Experiment

Cílem experimentu bylo pozorování vzniku a růstu bublin a jejich pohybu po odtržení v přesycené kapalině.

5.1. Akvárium

Původní myšlenkou bylo vytvořit vzduchotěsné akvárium, ve kterém by bylo možné generovat bubliny za pomoci regulace tlaku nad hladinou. Do poloviny akvária měla být napuštěna voda, nad jejíž hladinu byl kompresorem přiváděn vzduch. Podle Henryho zákona měl stoupat obsah plynu rozpuštěného ve vodě. Po odpuštění plynu se měla voda dostat do přesyceného stavu a mělo tak dojít k nukleaci bublin na předem vytvořených nerovnostech. Vlivem difuze pak k růstu těchto bublin a jejich následnému odtržení.

Vzhledem k velkému přetlaku (až 4 atmosféry) bylo vytvořeno válcové akvárium, které mělo tlaku lépe odolat než běžné hranaté. K pozorování sloužily průzory v podstavách válce. Jako hlavní materiál bylo zvoleno plexisklo.



Obr. 5.1: Akvárium

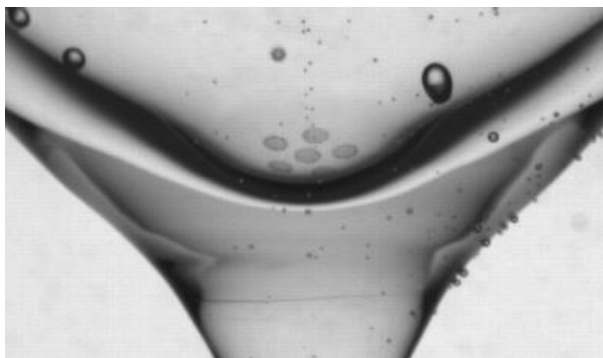
Bohužel se ukázalo, že plexisklo je natolik hydrofilní materiál, že sice docházelo k vytvoření velkých bublin na stěnách akvária, ale už nedocházelo k jejich odtržení.



Obr. 5.2: Bubliny vygenerované na stěnách z plexiskla

5.2. Sklenička

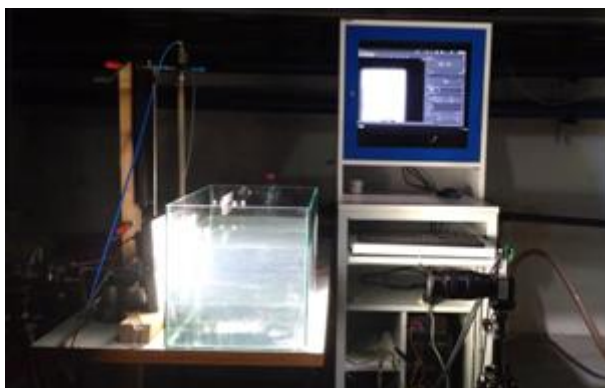
V druhém experimentu byly pozorovány bubliny generované ve skleničce na šampaňské, ve které byly uměle laserem na dně vytvořené důlky sloužící jako místa nukleace.



Obr. 5.3: Body sloužící ke generaci bublin

Aby bylo co nejlépe eliminováno zkreslení vlivem válcového tvaru skleničky, byla sklenička umístěna v hranatém akváriu naplněném vodou z vodovodu. Druhou výhodou tohoto opatření bylo, že se zamezilo zamlžení skla po nalití vychlazené tekutiny.

Záběry pak byly pořizovány rychlokamerou. Zezadu pak byla sklenička prosvícena LED panelem.



Obr. 5.4: Uspořádání experimentu

Měření bylo prováděno nejprve s perlivou vodou a posléze s proseccem. Vyhodnocována pak byla frekvence vzniku bublin, velikost bubliny v závislosti na čase a rychlost stoupání bubliny v závislosti na čase a průměru.

5.2.1 Bubliny s perlivou vodou

K měření byla použita obyčejná balená perlivá voda (Saguaro, Lidl). Postupně byly vyhodnocovány dvě bubliny⁹, na každém snímku byla vždy zaznamenána jejich poloha x,y v pixelech. Změna polohy v pixelech pak byla pomocí pravítka (obr. 5.5) převedena na délkové míry. U první bubliny bylo vyhodnoceno 179 snímků, u druhé pak 177.

⁹ Obě bubliny pocházejí z nukleačního bodu A (viz. Frekvence vzniku bublin)

Tabulka 5.1: Technické parametry měření

Kamera	Ximea CB120MG-CM-X8G3
Objektiv	Canon EF 24-70 mm f/2,8L
Předsádka	RAYNOX MACROSCOPIC LENS Model M-25
Rozlišení snímků (mm/pix)	0,0714
Frekvence snímků (s^{-1})	100

Tabulka 5.2: Naměřené hodnoty

	ζ	T (K)	D_p (mm)	D_k (mm)	t (s)	H (m)	n
Bublina 1	~1,7	294,5	<0,071	0,750	1,772	0,109	179
Bublina 2	~1,7	294,5	<0,071	0,714	1,752	0,108	177

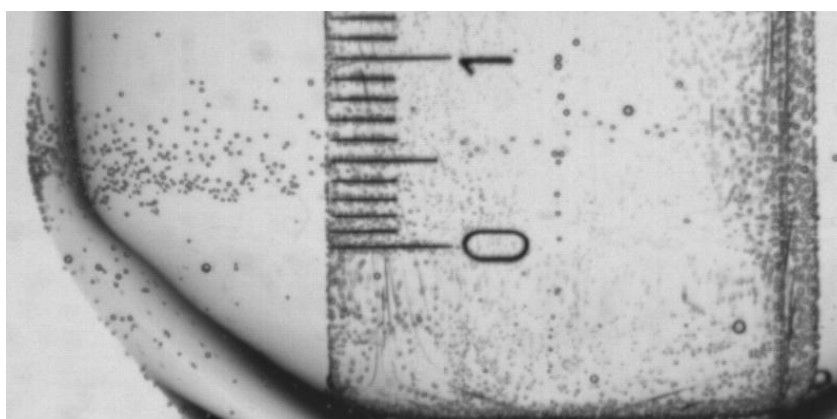
Stupeň přesycení vody nebylo možné během měření přesně určit. V okamžiku měření mohl být vzhledem k delší přípravě experimentu, kdy část bublin už vyprchala o něco menší než 2, což je obvyklý stupeň přesycení perlivých vod.

Teplota vody v okamžiku měření byla 21,5 °C.

Ze snímků bohužel nešlo dostatečně určit počáteční velikost bubliny, jelikož byla na hraně rozlišovací schopnosti kamery. Rovněž celé určování průměrů jednotlivých bublin během stoupání mohlo být poměrně nepřesné, vzhledem k tomu, že rozměry bublin byly v řádu jednotek pixelů a tedy zmýlení se o pixel by vyvolalo chybu přes 10%. Nicméně i tak je ze snímků patrné, že během pohybu vzhůru bubliny svůj průměr více než zdesetinásobily.

Ze stejného důvodu bylo poměrně obtížné určit i přesný okamžik odtržení bubliny, protože mohlo být zaznamenáno až její posunutí o pixel, přičemž už mohla být v pohybu o něco déle.

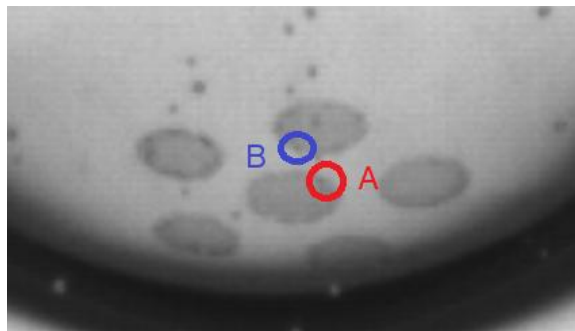
Vystoupaná výška k hladině ve skutečnosti byla o něco větší, protože se zcela nepodařilo eliminovat vliv dvojitého zakřivení u dna sklenice, kde pak milimetr odpovídal menšímu počtu pixelů (rozmezí 8-12 pix/mm) než ve zbytku sklenice (14 pix/mm).



Obr. 5.5: Vliv dvojitého zakřivení sklenice

Frekvence vzniku bublin

Během experimentu docházelo k pravidelné nukleaci bublin pouze ze dvou míst.



Obr. 5.6: Místa nukleace bublin

Vzhledem k obtížím s určováním okamžiku odtržení bubliny byly porovnávány časy, ve kterých bylo dosaženo předem stanoveného bodu.

Tabulka 5.3: Čas vzniku bublin z A

Bublina	1	2	3	4	5	6	7	8
Čas t (s)	0,149	0,229	0,319	0,408	0,488	0,568	0,657	0,727
Perioda T_V (s)	-	0,080	0,090	0,089	0,080	0,080	0,089	0,070

Tabulka 5.4: Čas vzniku bublin z B

Bublina	1	2	3	4	5	6	7	8
Čas t (s)	0,030	0,080	0,159	0,249	0,309	0,378	0,478	0,538
Perioda T_V (s)	-	0,050	0,079	0,090	0,060	0,069	0,100	0,060

Z tabulek lze vidět, že rozptyl period vzniku bublin z nukleačního místa A je menší (vytvořila se přibližně každých 0,07 – 0,09 s) než u period vzniku z místa B (zde byly bubliny tvořeny v intervalech 0,05 – 0,1 s). To mohlo být způsobené například paralelní tvorbou dvou bublin vedle sebe a následným po sobě kratším odtržením.

Frekvence se pak vypočítá jako převrácená hodnota periody:

$$f = \frac{1}{T_V} \quad (5.1)$$

Po dosazení krajních hodnot period se získají intervaly frekvence:

$$f_A = \left(\frac{1}{0,09}; \frac{1}{0,07} \right) = (11; 14) \text{ bublin/s}$$

$$f_B = \left(\frac{1}{0,10}; \frac{1}{0,05} \right) = (10; 20) \text{ bublin/s}$$

Porovnání sledovaných bublin s teoretickým výpočtem

Byla porovnána jednak závislost velikosti průměru bubliny na čase a jednak rychlosti stoupání bubliny na čase či na velikosti jejího průměru.

Tabulka 5.5: Parametry bubliny pro výpočty při teplotě 21,5°C

T	ζ	Δc	η _l	c _b	D	p _{out}	ρ _l	g	R
K	-	mol.m ⁻³	Pa.s	mol.m ⁻³	m ² .s ⁻¹	Pa	kg.m ⁻³	m.s ⁻²	J.K ⁻¹ .mol ⁻¹
294,5	1,7	63	0,00099	36	1,85.10 ⁻⁹	101300	998	9,81	8,31

Pro výpočet závislosti růstu průměru bubliny na čase byly použity rovnice (4.38) a (4.39) resp. (4.40).

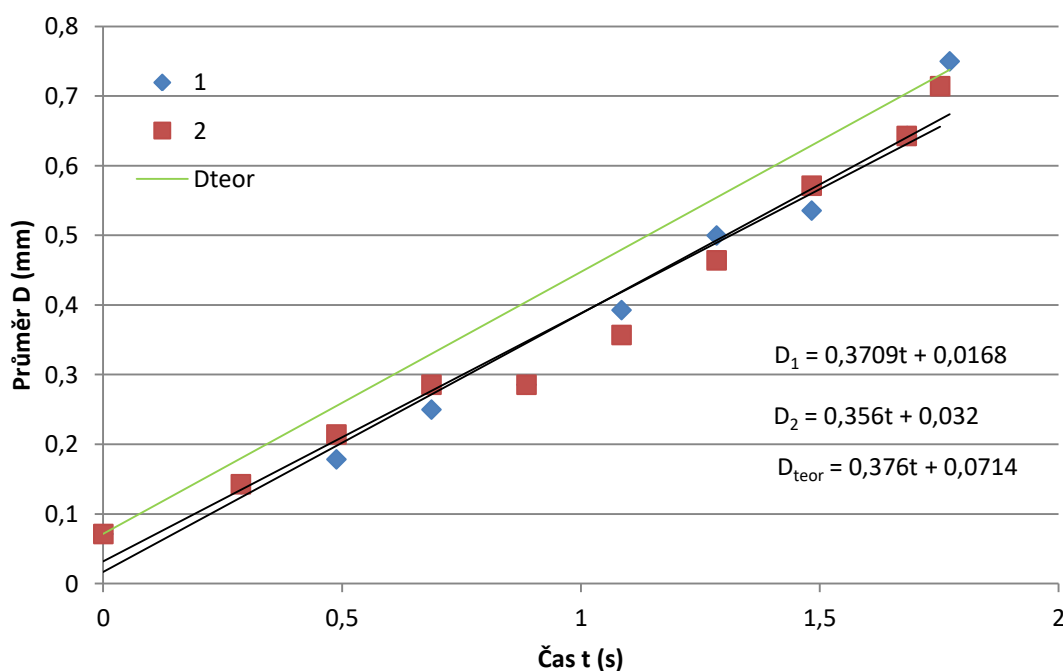
$$\begin{aligned} \frac{dR_b}{dt} = k &= 0,63 D^{\frac{2}{3}} \left(\frac{2(\rho_l - \rho_g)g}{9\eta_l} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{RT}{p_{out}} (c_{\infty} - c_R) = \\ &= 0,63 \cdot (1,85 \cdot 10^{-9})^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{2 \cdot 998 \cdot 9,81}{9 \cdot 0,00099} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{8,31 \cdot 294,5}{101300} \cdot 63 = 0,188 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

Do rovnice (4.40) popisující růst poloměru byla dosazena konstanta k a rovnice byla upravena pro tvar popisující růst průměru:

$$d_b = d_d + 2kt \quad (5.2)$$

Z rovnice je vidět, že závislost průměru bubliny na čase je lineární. Naměřené průměry v čase jsou nižší než je průměr získaný teoretickým výpočtem. Nicméně směrnice přímk si odpovídají.

Graf 5.1: Závislost průměru bublin na čase



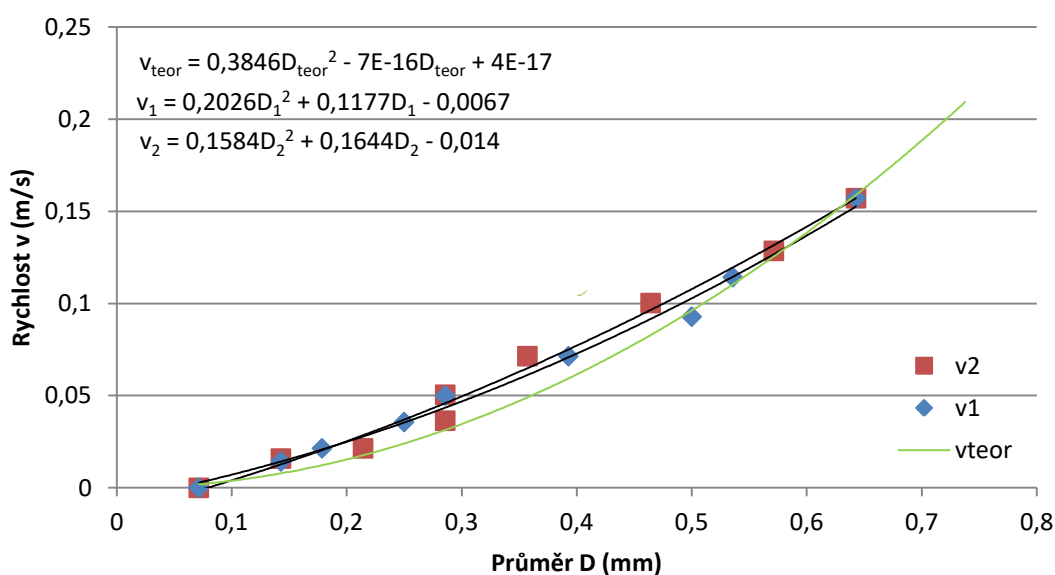
Pro popis rychlosti malých bublin lze použít Stokesova rovnice (4.30). Z rovnice byl vypuštěn člen zahrnující hustotu vzduchu, která je proti hustotě vody zanedbatelná, naopak přibyla konstanta $\alpha = 0,7$ zahrnující vliv stěn sklenice:

$$v = \frac{\rho_l g \alpha}{18 \eta_l} d_b^2 \quad (5.3)$$

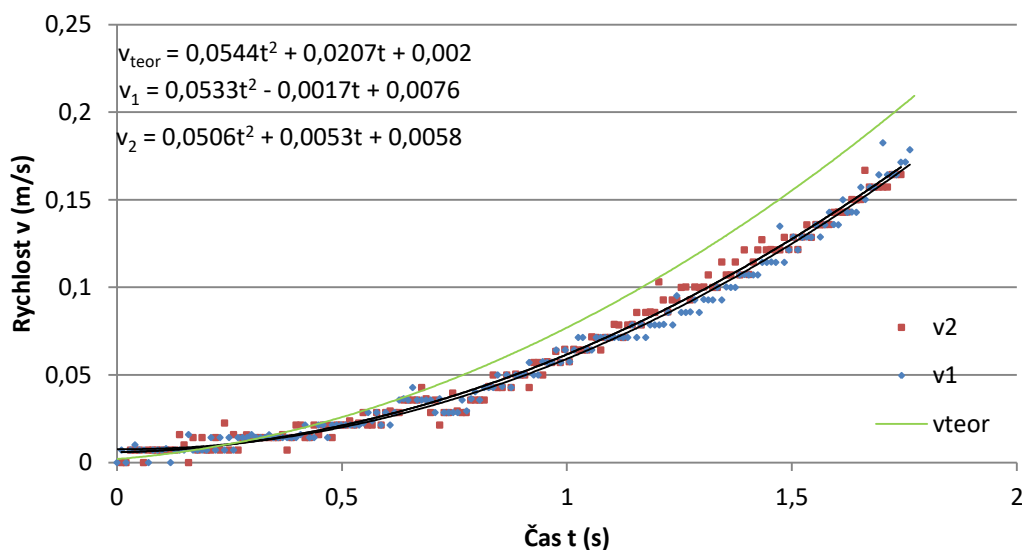
Z rovnice je vidět, že závislost rychlosti na průměru bubliny roste s druhou mocninou. Protože bublina rostla v čase lineárně, tak s druhou mocninou poroste i závislost rychlosti bubliny na čase.

Experimentální data jsou opět srovnána s teoretickým výpočtem. Z grafu (5.3) lze vidět, že velikost teoretické rychlosti roste rychleji než naměřené rychlosti.

Graf 5.2: Závislost rychlosti bubliny na jejím průměru



Graf 5.3: Závislost rychlosti bubliny na čase



5.2.2 Bubliny z prosecca

K experimentu bylo použito prosecco (Prosecco Allini) o obsahu alkoholu 10,5%. Postup měření a vyhodnocování probíhal podobně jako u perlivé vody. Pouze s tím rozdílem, že byl vyhodnocován každý druhý snímek. Pozorovány byly opět dvě bubliny – A vznikající z prostředního nukleačního bodu a B generovaná z krajního bodu.

Tabulka 5.6: Technické parametry měření

Kamera	Ximea CB120MG-CM-X8G3
Objektiv	Canon EF 24-70 mm f/2,8L
Předsádka	RAYNOX MACROSCOPIC LENS Model M-25
Ohnisko (mm)	~ 0,48
Clona	3,2
Zaostření (m)	~ 0,7
Rozlišení snímků (mm/pix)	0,0714
Frekvence snímků (s^{-1})	100

Tabulka 5.7: Naměřené hodnoty

	ζ	T (K)	D_p (mm)	D_k (mm)	t (s)	H (m)	n
Bublina A	~ 5	281	<0,071	0,500	2,832	0,109	143
Bublina B	~ 5	281	<0,071	0,428	2,713	0,109	137

Stupeň přesycení opět nebylo možné přesně určit, ale měření proběhlo ihned po otevření láhve, takže lze předpokládat, že se pohyboval kolem 5.

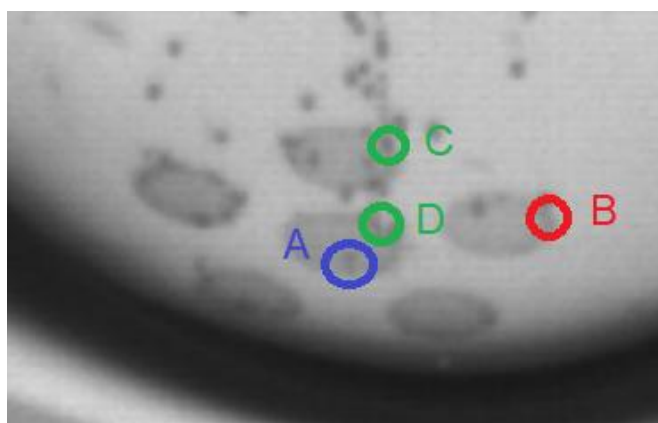
Teplota prosecca během měření byla 8 °C.

Počáteční rozměr bublin byl opět na hranici rozlišení. Průměry vznikajících bublin tak byly pravděpodobně opět menší než 0,071 mm. Konečné průměry byly proti měření s vodou poloviční, dosahovaly velikosti kolem 0,5 mm.

Doba výstupu bublin k hladině byla okolo 2,8 vteřiny.

Frekvence vzniku bublin

Při tomto experimentu existovalo více míst, kde docházelo ke generaci bublin.



Obr. 5.7: Místa generace bublin

Tabulka 5.8: Čas vzniku bublin z A

Bublina	1	2	3	4	5	6	7	8
Čas t (s)	0,010	0,189	0,389	0,568	0,748	0,997	1,217	1,406
Perioda T_V (s)	-	0,179	0,200	0,179	0,180	0,249	0,220	0,189

Tabulka 5.9: Čas vzniku bublin z B

Bublina	1	2	3	4	5	6	7	8
Čas t (s)	0,050	0,269	0,628	1,227	1,805	2,364	2,912	-
Perioda T_V (s)	-	0,219	0,359	0,599	0,578	0,559	0,548	-

Je vidět, že perioda tvoření bublin z bodu A (0,180 – 0,250 s) je výrazně menší než perioda z bodu B (0,5 - 0,6 s). U bodu B druhá bublina patrně byla generována v blízkém bodě, kde docházelo k výrazně pomalejší generaci. Čas mezi zaznamenáním první a třetí bubliny je pak odpovídajících 0,58 s.

Pomocí vztahu (5.1) se pak určí frekvence:

$$f_A = \left(\frac{1}{0,25}; \frac{1}{0,18} \right) = (4; 5,5) \text{ bublin/s}$$

$$f_B = \left(\frac{1}{0,60}; \frac{1}{0,55} \right) = (1,7; 1,8) \text{ bublin/s}$$

Dále také existovala místa C, D, ve kterých se tvořily malé bubliny nepřetržitě tak, že při daném rozlišení nebylo možné frekvenci blíže určit.

Porovnání sledovaných bublin s teoretickým výpočtem

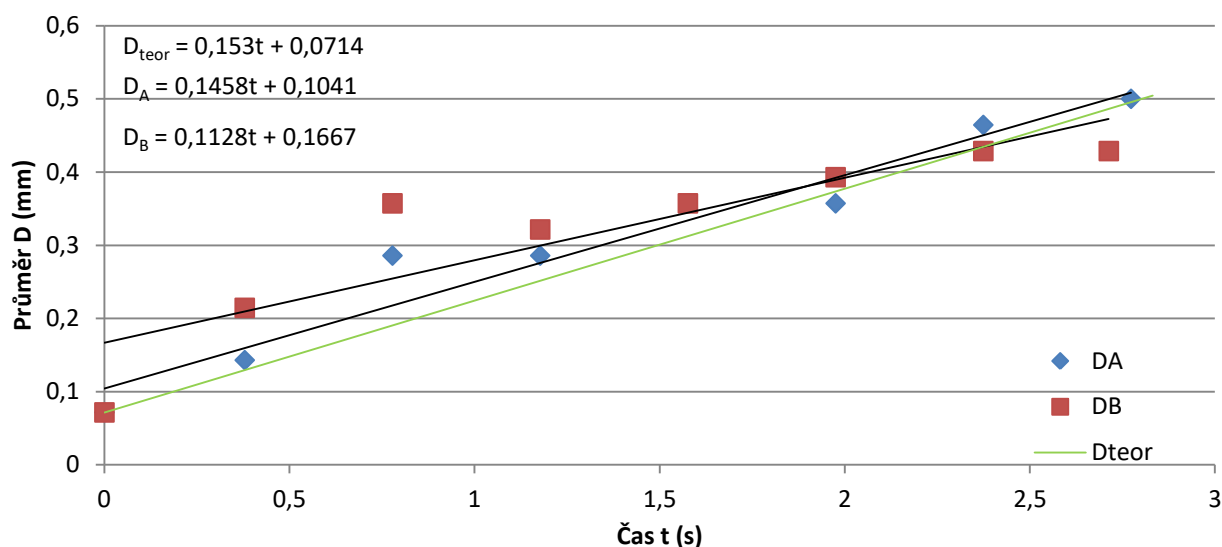
Porovnávání probíhalo stejně jako v případě s vodou.

Tabulka 5.10: Parametry bubliny pro výpočty při teplotě 8 °C

T	ζ	Δc	η_l	c_b	D	p_{out}	ρ_l	g	R
K	-	mol.m ⁻³	Pa.s	mol.m ⁻³	m ² .s ⁻¹	Pa	kg.m ⁻³	m.s ⁻²	J.K ⁻¹ .mol ⁻¹
281	5	252	0,00235	51	2,8.10 ⁻¹⁰	101300	1000	9,81	8,31

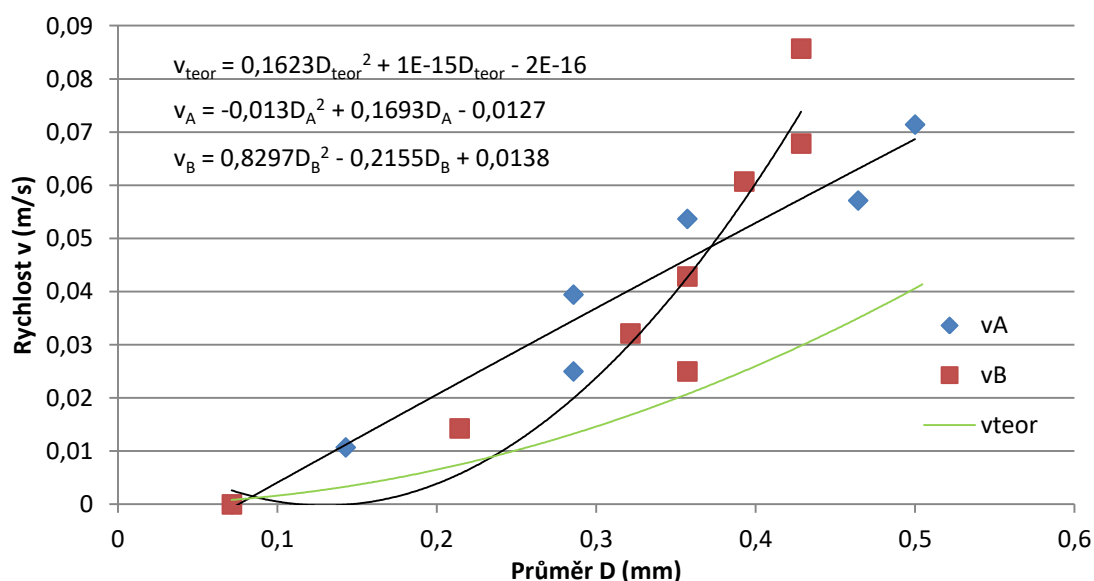
Konstanta k byla vypočítána jako $k = 0,153 \text{ mm.s}^{-1}$.

Graf 5.4: Závislost průměru bubliny na čase

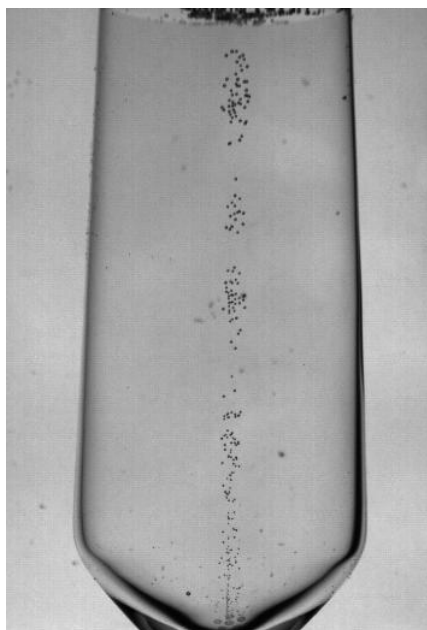


Z grafu je vidět, že naměřené závislosti průměrů na čase už neodpovídají tak dobře teoretickému výpočtu jako při měření s vodou. Průměr bubliny bylo obtížnější vyhodnocovat než u měření s vodou, protože v roji (obr. 5.8) docházelo k častému překrývání bublin. Bubliny navíc dorůstaly do velikosti pouze 6 – 7 pixelů, proto se více projevilo případné nepřesné odečtení pixelu.

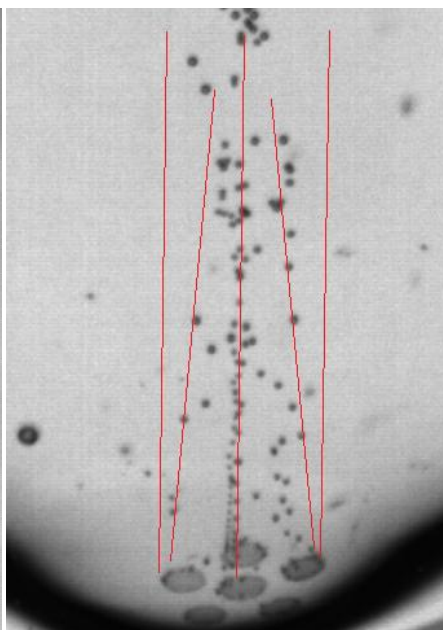
Graf 5.5: Závislost rychlosti bubliny na průměru



Rychlost bubliny v čase rostla s rostoucím průměrem bubliny. Nicméně po uražení vzdálenosti přibližně 2 cm vznikaly roje bublin pohybujících se dohromady. V těchto rojích byla rychlost bubliny výrazně ovlivněna pohybem okolních bublin. Zároveň si bylo možné všimnout, že po odtržení bublin vzniklých na bočních důlcích byla bublina přitahována k proudu bublin generovanému ve středním důlku (obr. 5.9).

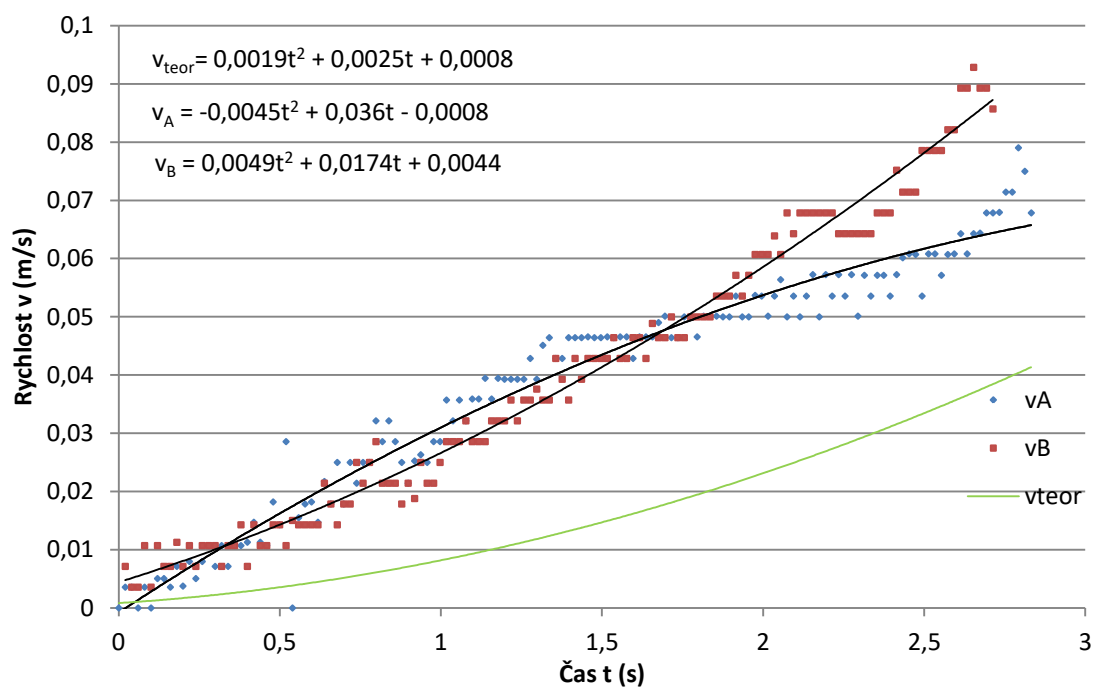


Obr. 5.8: Roje bublin



Obr. 5.9: Stahování bublin

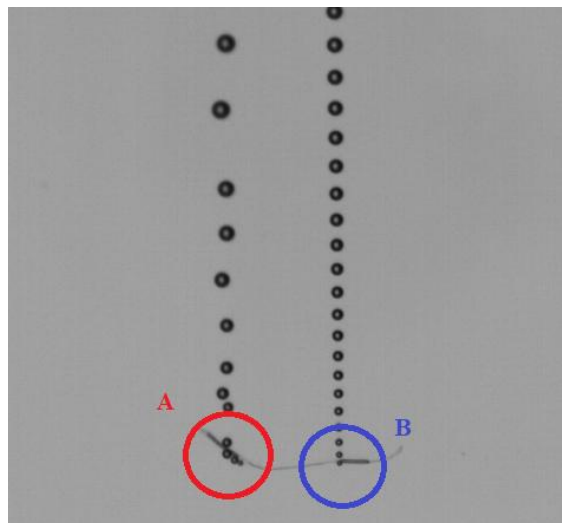
Graf 5.6: Závislost rychlosti bubliny na čase



Jak se už dalo předpokládat, ani závislost rychlosti na čase příliš neodpovídala teoretické závislosti.

5.3. Bubliny z vlákna celulózy

Zajímavým nukleačním místem bylo duté vlákno celulózy, které ve sklenici zůstalo po vyleštění utěrkou. K experimentu bylo opět použito Prosecco Allini s obsahem alkoholu 10,5%.



Obr. 5.10: Nukleační místa na vlákně celulózy

Byly porovnány frekvence vzniku bublin ze dvou bodů na vlákně. Za povšimnutí stojí vzduchová kapsa uvnitř vlákna, sloužící jako zárodek nové bubliny.

Tabulka 5.11: Parametry měření

Kamera	Ximea CB120MG-CM-X8G3
Objektiv	Canon 70-200 mm f/4,0 L USM
Předsádka	RAYNOX MACROSCOPIC LENS Model M-25
Frekvence snímků (s^{-1})	400
Teplota T (K)	294,5
Stupeň přesycení ζ	~ 5

Vyhodnocování frekvencí vzniku bylo jednodušší a tím i přesnější než v předcházejících dvou případech, neboť na fotce nedocházelo ke splývání vznikající bubliny s vláknem. Navíc jednotlivá nukleační místa byla dostatečně daleko od sebe, takže nehrozila záměna bublin ze dvou blízkých míst.

Tabulka 5.12: Čas vzniku bublin z A

Bublina	1	2	3	4	5	6	7	8
Čas t (s)	0,1200	0,2575	0,6650	0,8850	1,1200	1,4350	1,6525	1,8850
Perioda T_V (s)	-	0,238	0,308	0,220	0,235	0,315	0,218	0,232

Tabulka 5.13: Čas vzniku bublin z B

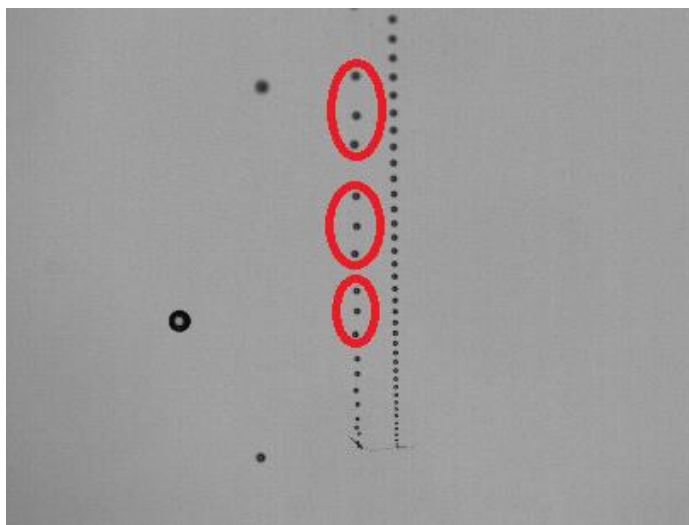
Bublina	1	2	3	4	5	6	7	8
Čas t (s)	0,0675	0,1925	0,3150	0,4400	0,5650	0,6875	0,8100	0,9350
Perioda T_V (s)	-	0,125	0,123	0,125	0,123	0,123	0,123	0,125

Z period vzniku u A lze vidět, že po vytvoření třech bublinek následovala delší pauza. Vzhledem k tomu je frekvenci tvorby bublin vhodnější vypočítat z periody celého cyklu vytvoření třech bublin:

$$f_A = \left(\frac{3}{0,208 + 0,220 + 0,235} \right) = 4,5 \text{ bublin/s}$$

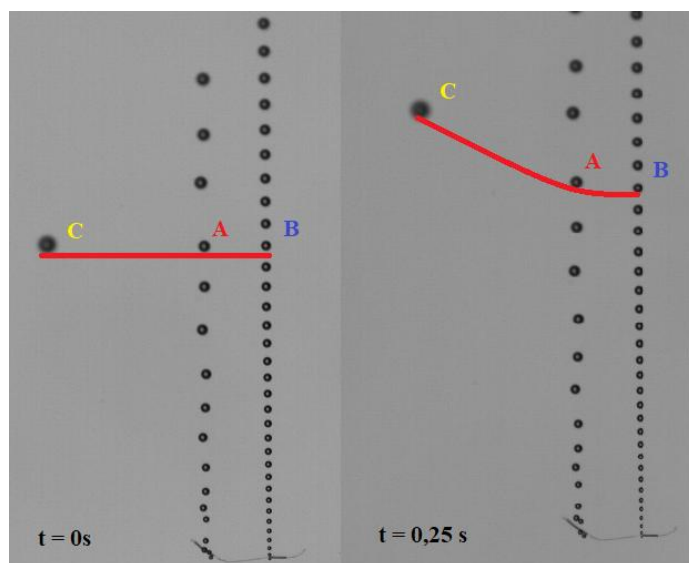
Bubliny v bodě B vznikaly v pravidelných intervalech s průměrnou periodou $T_v = 0,124 \text{ s}$. Z ní je pak spočítána frekvence:

$$f_B = \left(\frac{1}{0,124} \right) = 8 \text{ bublin/s}$$



Obr. 5.11: Trojce bublinek

Bohužel nebyl uskutečněn snímek s měřítkem, takže vyhodnocovat rychlosti nemělo smysl. Nicméně i z fotek je vidět, že rychlost bubliny roste s velikostí jejího průměru. Na obrázku (5.12) je vidět, že větší bublina C vzniklá z nukleačního bodu na dně skleničky je výrazně rychlejší než menší bubliny A a B generované z vlákna.



Obr. 5.12: Srovnání rychlostí bublin

5.4. Zhodnocení experimentů

U provedených experimentů se s teoretickým výpočtem poměrně dobře shodují data získaná při pokusu s perlivou vodou.

Data získaná z experimentu s proseccem se nejen že neshodují, ale neodpovídá ani předpokládaná závislost. Hlavní příčiny patrně jsou menší rozměr bublin z prosecca než bublin z vody, takže při zmýlení se při odečítání o pixel vznikla chyba přesahující i 20% a vliv pohybu ostatních bublin v rojích, který patrně ovlivnil pohyb bubliny více než narůstající poloměr.

Nejpěknější snímky byly získány z experimentu s vláknem celulózy, kde byl pěkně vidět i počátek generace jednotlivých bublin. Bohužel díky absenci snímku s pravítkem nebylo možné porovnat závislosti rychlosti bublin na poloměru nebo čase.

6. Závěr

Cílem práce bylo popsat vznik a chování bublin v přesycených roztocích, provést experiment a naměřená data porovnat s teoretickými předpoklady.

První kapitola popisuje možnosti tvorby bublin v kavitačních procesech.

Druhá kapitola se zabývá rozpustností plynu v kapalině. Rozpustnost je popsána Henryho zákonem, který říká, že rozpustnost plynu v kapalině je přímo úměrná tlaku plynu nad kapalinou. V kapitole jsou uvedeny různé podoby Henryho zákona a jim odpovídající konstanty.

Ve třetí kapitole je popsána nukleace a růst bublin v přesyceném roztoku. Jsou uvedeny podmínky možnosti vzniku bublin. Je zmíněn vliv povrchového napětí kapaliny. Dále je objasněn proces difuze plynu do bubliny, který popisují Fickovy zákony. Nakonec je popsán růst bubliny a moment jejího odtržení.

Čtvrtá kapitola se zabývá stoupáním bubliny v kapalině. Jsou uvedeny síly působící na bublinu během pohybu. Dále jsou uvedeny vztahy pro výpočet rychlosti bubliny v závislosti na měnících se podmínkách. Také je uvedena rovnice růstu bubliny během jejího stoupání v přesyceném roztoku.

V poslední kapitole jsou popsány průběhy experimentů. Nejprve neúspěšný experiment s akváriem, dále experimenty s perlivou vodou a proseccem ve skleničce, kdy docházelo k tvorbě bublin na laserem vyrobených nukleačních důlcích. Naměřené hodnoty byly porovnány s teoretickým výpočtem. Jako zajímavost byl zmíněn i pokus, kdy docházelo k nukleaci ve vláknu celulózy.

Zejména u experimentu s proseccem se naměřené výsledky rozcházely s teoretickými hodnotami. Jednou z příčin chyb u vyhodnocování experimentu bylo nedostatečné přiblížení bubliny, takže nebylo možné zcela přesně stanovit její průměr. Tato vada by se dala odstranit například použitím hranatého akvária, kde by nedocházelo ke zkreslení vlivem zakřivení a nemuselo by tak být umístěno v druhém korekčním akváriu. Objekt by pak mohl být umístěn blíže vznikajícím bublinám.

K dalšímu výraznému ovlivnění výsledků došlo vlivem pohybu okolních bublin v roji. Pro vyšetřování chování jedné bubliny by tak bylo lepší, kdyby ke vzniku rojů vůbec nedocházelo. Jednou z možností jak toho docílit je vytvořit nukleační místo, z něhož bude docházet k tvorbě pouze jednoho sloupce bublin. Toho by se dalo docílit například zmenšením poloměru nukleačních důlků nebo by se ke generaci mohlo použít již zmíněné vlákno celulózy.

Do teoretického výpočtu byla vnášena nepřesnost zejména neznalostí stupně přesycení kapaliny, takže nebylo možné přesně určit hnací sílu difuze. Bylo by proto vhodné během experimentu měřit stupeň přesycení gehaltemetrem.

Seznam použitých zdrojů

- [1] PELIKÁN, Vladimír. Akvárium: Plyny ve vodě. *Akvárium* [online]. Brno: Vladimír Pelikán, 2000, březen 2002 [cit. 2019-04-13]. Dostupné z: http://planta.aquariana.cz/plyny_ve_vode.htm
- [2] Příspěvatelé Wikipedie, *William Henry (chemik)* [online], Wikipedie: Otevřená encyklopedie, c2017, Datum poslední revize 31. 12. 2017, 17:14 UTC, [citováno 13. 04. 2019] <[https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=William_Henry_\(chemik\)&oldid=15697478](https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=William_Henry_(chemik)&oldid=15697478)>
- [3] GROSS, Tf a Pf PELZ. Diffusion-driven nucleation from surface nuclei in hydrodynamic cavitation. *Journal Of Fluid Mechanics* [online]. CAMBRIDGE UNIV PRESS, 2017, **830**, 138-164 [cit. 2019-04-13]. DOI: 10.1017/jfm.2017.587. ISSN 0022-1120. Dostupné z: Proquestu
- [4] *Zakladní kurz fyziky pro distanční studium na MFF UK* [online]. Praha: MFF UK [cit. 2019-04-13]. Dostupné z: https://physics.mff.cuni.cz/kfpp/skripta/kurz_fyziky_pro_DS/www/fyzika.html
- [5] SANDER, R. Compilation of Henry's law constants (version 4.0) for water as solvent. *Atmospheric Chemistry and Physics* [online]. Copernicus, 2015, **15**(8), 4399 [cit. 2019-04-13]. DOI: 10.5194/acp-15-4399-2015. ISSN 1680-7316. Dostupné z: <https://www.atmos-chem-phys.net/15/4399/2015/acp-15-4399-2015.pdf>
- [6] HOLEČEK, Oldřich. *Chemicko-inženýrské tabulky*. 2. vyd. Praha: VŠChT v Praze, 2007. ISBN 978-80-7080-444-5.
- [7] ENRÍQUEZ, Oscar r., Christian HUMMELINK, Gert-wim BRUGGERT, Detlef LOHSE, Andrea PROSPERETTI, Devaraj VAN DER MEER a Chao SUN. Growing bubbles in a slightly supersaturated liquid solution. *Review of Scientific Instruments* [online]. American Institute of Physics, 2013, **84**(6), 8 [cit. 2019-04-13]. DOI: 10.1063/1.4810852. ISSN 0034-6748. Dostupné z: http://stilton.tnw.utwente.nl/people/sunc/files/2013_RSI.pdf
- [8] MOORE, Walter J a WALTER MOORE. *Fyzikální chemie*. Praha: SNTL, 1979, 974 s. ISBN 04-604-81.
- [9] Příspěvatelé WikiSkript, *1. Fickův zákon* [online], , c2017, Datum poslední revize 16. 01. 2017, 20:54 UTC, [citováno 13. 04. 2019] <https://www.wikiskripta.eu/index.php?title=1._Fick%C5%AFv_z%C3%A1kon&oldid=368394>
- [10] *Co je co v povrchové a koloidní chemii* [online]. Praha: VŠCHT v Praze, 2005 [cit. 2019-04-14]. Dostupné z: http://147.33.74.135/knihy/uid_es-001/motor/main.obsah.html
- [11] STEINER, Ladislav a George STANDART. *Tvorba a chování plynných bublin v kapalině*. Praha: Academia, 1966, 60 s. ISBN 21-032-66.
- [12] ŠOB, František. *Hydromechanika*. Brno: Akademické nakladatelství CERM s.r.o, 2002, 238 s. : il. ISBN 80-214-2037-5.
- [13] ATKINS, P. W. a Julio DE PAULA. *Fyzikální chemie*. 9. vyd. Praha: Vysoká škola chemicko-technologická v Praze, 2013. ISBN 978-80-7080-830-6.
- [14] GOR, Gennady Yu. a Fedor M. KUNI. Gas Bubble Growth Dynamics in a Supersaturated Solution: Henry's and Sievert's Solubility Laws. *Nucleation Theory and Applications, P. 213-233, JINR Dubna, 2011* [online]. [cit. 2019-04-14]. Arxiv ID: 1205.5471. Dostupné z: <https://arxiv.org/abs/1205.5471>

- [15] KUCHMA, A. E., G. Yu. GOR a F. M. KUNI. Stages of steady diffusion growth of a gas bubble in strongly supersaturated gas-liquid solution. *Colloid Journal* [online]. 2009, **71**(4), 520-528 [cit. 2019-04-14]. DOI: 10.1134/S1061933X09040140. ISSN 1061-933X. Dostupné z: <http://link.springer.com/10.1134/S1061933X09040140>
- [16] HALLIDAY, David, Robert RESNICK a Jearl WALKER, DUB, Petr, ed. *Fyzika. 2., přeprac. vyd.* Brno: VUTIUM, c2013. Překlady vysokoškolských učebnic. ISBN 978-80-214-4123-1.
- [17] YAN, Xiaokang, Kaixin ZHENG, Yan JIA, Zhenyong MIAO, Lijun WANG, Yijun CAO a Jiongtian LIU. Drag Coefficient Prediction of a Single Bubble Rising in Liquids. *Industrial and Engineering Chemistry Research* [online]. 2018, **57**(15), 5385-5393 [cit. 2019-04-14]. DOI: 10.1021/acs.iecr.7b04743. ISSN 0888-5885. Dostupné z: <http://pubs.acs.org/doi/10.1021/acs.iecr.7b04743>
- [18] BRENNEN, Christopher E. *Fundamentals of multiphase flow* [online]. New York: Cambridge University Press, 2005 [cit. 2019-04-14]. ISBN 9780511807169. Dostupné z: <https://doi-org.ezproxy.lib.vutbr.cz/10.1017/CBO9780511807169>
- [19] LOTH, Eric. *Particles, Drops and Bubbles: Fluid Dynamics and Numerical Methods*. London: Cambridge University Press, 2010, 775 s.
- [20] *Experimental Thermal and Fluid Science* [online]. 2016, **78** [cit. 2019-04-14]. ISSN 08941777. Dostupné z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S089417771630156X>
- [21] *HyperPhysics* [online]. Atlanta (Georgia): Carl R. Nave, 2016 [cit. 2019-04-14]. Dostupné z: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hph.html>
- [22] *Chem1 Online Textbook* [online]. Burnaby (Canada): Stephen Lower, 2010 [cit. 2019-04-14]. Dostupné z: <http://www.chem1.com/acad/webtext/virtualtextbook.html>
- [23] Wikipedia contributors. *Adolf Eugen Fick* [online]. San Francisco: Wikipedia, The Free Encyclopedia., Date of last revision: 30 January 2019 10:26 UTC [cit. 2019-04-14]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Adolf_Eugen_Fick&oldid=880927025
- [24] MOSTINSKY, I.L. A-to-Z Guide to Thermodynamics, Heat and Mass Transfer, and Fluids Engineering. *Thermopedia* [online]. 2 February 2011 [cit. 2019-05-05]. DOI: 10.1615/AtoZ.d.diffusion_coefficient. Dostupné z: <http://www.thermopedia.com/content/696/>
- [25] Wikipedia contributors. Young–Laplace equation [Internet]. Wikipedia, The Free Encyclopedia; 2019 Mar 13, 18:52 UTC [cited 2019 May 5]. Available from: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Young%E2%80%93Laplace_equation&oldid=887611832.
- [26] NOSKIEVIČ, Jaromír. *Kavitace*. Praha: Academia, 1969, 278 s. : il.
- [27] FERNANDEZ RIVAS, David, Andrea PROSPERETTI, Aaldert G. ZIJLSTRA, Detlef LOHSE a Han J. G. E. GARDENIERS. Efficient Sonochemistry through Microbubbles Generated with Micromachined Surfaces. *Angewandte Chemie International Edition*. 2010, **49**(50), 9699-9701. DOI: 10.1002/anie.201005533. ISSN 14337851. Dostupné také z: <http://doi.wiley.com/10.1002/anie.201005533>
- [28] LIGER-BELAIR, G. The physics behind the fizz in champagne and sparkling wines. *The European Physical Journal Special Topics*. 2012, **201**(1), 1-88. DOI: 10.1140/epjst/e2012-01528-0. ISSN 1951-6355. Dostupné také z: <http://www.springerlink.com/index/10.1140/epjst/e2012-01528-0>

- [29] LIGER-BELAIR, Gerard, Florine STERNENBERG, Stephane BRUNNER, Bertrand ROBILLARD a Clara CILINDRE. Bubble dynamics in various commercial sparkling bottled waters. *Journal of Food Engineering* [online]. Elsevier B.V, 2015, **163**, 60 [cit. 2019-05-20]. ISSN 0260-8774. Dostupné z: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jfoodeng.2015.04.016>

Seznam použitých zkratk a symbolů

značka	jednotka	význam
β	-	koeficient skluzového tření
Δ_{solH}	J	enthalpie rozpuštění
ζ	-	stupeň přesycení roztoku
η_0	Pa·s	dynamická viskozita prostředí
η_g	Pa·s	dynamická viskozita plynu
η_l	Pa·s	dynamická viskozita kapaliny
ρ_g	kg·m ⁻³	hustota plynu
ρ_l	kg·m ⁻³	hustota kapaliny
σ	N·m ⁻¹	povrchové napětí
τ	s	časová konstanta
b	mol·kg ⁻¹	molalita
C_A	mol·m ⁻³	koncentrace v A
c_a	mol·m ⁻³	koncentrace plynu v kapalině
c_b	mol·m ⁻³	koncentrace plynu na povrchu bubliny
C_D	-	celkový odporový koeficient
c_D	-	součinitel odporu
c_g	mol·m ⁻³	koncentrace plynu ve vzduchu
c_n	mol·m ⁻³	nasycená koncentrace plynu v kapalině pro daný tlak
c_p	-	koeficient tlakového odporu
c_t	-	koeficient třecího odporu
c_v	-	koeficient virtuální hmotnosti
c_∞	mol·m ⁻³	koncentrace plynu v kapalině
D	m·s ⁻¹	difuzní koeficient
D_p	m	průměr bubliny po odtržení
D_k	m	průměr bubliny na hladině
d_b	m	průměr bubliny
d_{eq}	m	ekvivalentní průměr bubliny
d_0	m	průměr otvoru pro vznik bubliny
E_s	J	energie povrchové vrstvy
E_o	-	Eötvösovo číslo
f	Hz (bubl. ·s ⁻¹)	frekvence vzniku bubliny
f_t	-	koeficient tření
F_σ	N	síla působící na povrch bubliny od povrchového napětí
F_D	N	síla odporu prostředí
F_d	N	dynamická síla proudu
F_g	N	tíhová síla
F_H	N	historická síla
F_{in}	N	síla působící na povrch bubliny zevnitř
F_{out}	N	síla působící na povrch bubliny z vnějšku
F_p	N	síla tlakového odporu
F_T	N	síla třecího odporu
F_t	N	přitažlivé síly mezi molekulami v tečném směru
F_{TD}	N	celková odporová síla
F_v	N	síla virtuální hmotnosti
F_{vz}	N	vztlačková síla
g	m·s ⁻²	tíhové zrychlení
H	m	vystoupaná výška bubliny
H^{bp}	kg ⁻¹ ·Pa ⁻¹	Henryho konstanta

H^{cc}	-	Henryho konstanta
H^{cp}	$\text{mol} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{Pa}^{-1}$	Henryho konstanta
H^{xp}	Pa^{-1}	Henryho konstanta
J_A	$\text{mol} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$	difuzní tok
K	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	koeficient přestupu hmoty
K^{px}	Pa	Henryho konstanta
l	m	délka rozhraní
l_{ch}	m	charakteristická délka
\dot{m}	$\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$	hmotnostní tok
M	$\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$	molární hmotnost
m_b	kg	hmotnost bubliny
m_l	kg	hmotnost bublinou vytlačené kapaliny
Mo	-	Mortonovo číslo
N	-	počet molekul v bublině
n	-	normálový vektor
n_A	mol	látkové množství
n_g	$\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$	koncentrace plynu v bublině
p	Pa	parciální tlak plynu v kapalině
p_n	Pa	parciální tlak plynu uvnitř bubliny
p_{in}	Pa	vnitřní tlak na povrch bubliny
p_{out}	Pa	vnější tlak na povrch bubliny
Pe	-	Pecletovo číslo
R_b	m	poloměr bubliny
R_c	m	kritický poloměr bubliny
R_d	m	poloměr odtržení bubliny
R_m	m	poloměr bubliny v okamžiku kdy se zastaví zrychlení růstu bubliny
R_0	m	poloměr kdy lze zanedbat vliv Laplaceovy síly na bublinu
r_p	m	poloměr částice
R_σ	m	charakteristický rozměr bubliny
Re	-	Reynoldsovo číslo
s	$\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$	rozpustnost plynu
S	m^2	plocha
S_b	m^2	povrch bubliny
S_0	m^2	plocha průřezu bubliny do směru proudu
S_p	m^2	charakteristická plocha kolmá na rychlost proudu
S_t	m^2	omočená plocha tělesa
S_r	m^2	jednotková plocha rozhraní
Sh	-	Sherwoodovo číslo
T	K	termodynamická teplota
T_v	s	perioda vzniku bublin
t	s	čas
t_1	s	čas ukončení prvního stádia růstu bublin
t_2	s	čas ukončení druhého stádia růstu bublin
t_3	s	čas dosažení poloměru R_0
U	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	rychlost prostředí
V_b	m^3	objem bubliny
v_b	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	rychlost bubliny
v_T	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	terminální rychlost bubliny
w	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$	relativní rychlost
We	-	Weberovo číslo
x	-	molární zlomek

Přehled konstant

značka	hodnota	jednotka	význam
α	0,7	-	korekce vlivu stěny skleničky
k_B	$1,380 \cdot 10^{-23}$	$J \cdot K^{-1}$	Boltzmannova konstanta
R	8,314	$J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$	molární plynová konstanta